**Prof. Dr. M. Rapoport**
**T. Richarz** **SS 2013**

**Algebra I**

**6. Übungsblatt**

**Aufgabe 1:**
Sei $A$ ein Ring, und seien $M, N$ endlich erzeugte $A$-Moduln. Zeige, dass

$$\mathrm{supp}(M \otimes_A N) = \mathrm{supp}(M) \cap \mathrm{supp}(N).$$

**Tip:** Zeige zunächst, dass $M \otimes_A N = 0$ bereits $M = 0$ oder $N = 0$ impliziert, falls $A$ lokal ist.

**Aufgabe 2:**
Seien $S \subset T$ zwei multiplikativ abgeschlossene Teilmengen eines Ringes $A$.
i) Sei $T'$ das Bild von $T$ in $S^{-1}R$. Zeige, dass

$$T^{-1}A = {T'}^{-1}(S^{-1}A).$$

ii) Der kanonische Homomorphismus $A \to S^{-1}A$ ist injektiv, falls $S$ keine Nullteiler aus $A$ enthält. In diesem Fall gilt für jeden Zwischenring $A'$ mit $A \subset A' \subset S^{-1}A$ bereits

$$S^{-1}A = S^{-1}A'.$$

iii) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$, und sei $A' = S^{-1}A$. Dann gilt

$$A'_{\mathfrak{p}A'} = A_{\mathfrak{p}}.$$

Insbesondere gilt für zwei Primideale $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ die Identität $(A_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}} = A_{\mathfrak{p}}$.

**Aufgabe 3:**
Ein Homomorphismus von Ringen $f : A \to B$ heißt *ganz*, falls die Erweiterung $f(A) \subset B$ ganz ist.
i) Sei $f : A \to B$ ein ganzer Homomorphismus von Ringen. Zeige, dass die induzierte Abbildung $f^* : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ abgeschlossen ist, d.h. ist $Y \subset \mathrm{Spec}(B)$ eine abgeschlossene Menge, so ist $f^*(Y)$ abgeschlossen in $\mathrm{Spec}(A)$.
ii) Sei $A$ ein Ring, und sei $f : B \to B'$ ein ganzer Homomorphismus von $A$-Algebren. Zeige, dass für eine beliebige $A$-Algebra $C$ der Homomorphismus $f \otimes_A C : B \otimes_A C \to B' \otimes_A C$ ganz ist.

**Aufgabe 4:**
Sei $A$ ein Ring, und sei $G$ eine endliche Gruppe, die auf $A$ in Form von Ringautomorphismen operiert. Sei $A^G = \{a \in A \mid ga = a,\ \forall\, g \in G\}$ der Unterring der $G$-invarianten Elemente.
i) Zeige, dass $A$ ganz über $A^G$ ist.
ii) Sei $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge mit $g \cdot S \subset S$ für alle $g \in G$. Sei $S^G = S \cap A^G$. Zeige, dass die Operation von $G$ eine Operation auf $S^{-1}A$ liefert, und dass gilt

$$(S^G)^{-1}A^G \ \simeq\ (S^{-1}A)^G.$$

Abgabe: Montag, 27. Mai 2013.