Prof. Dr. M. Rapoport
T. Richarz **SS 2013**

Algebra I

2. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Sei R ein Ring, und sei $\varphi : R^n \to R^m$ ein Homomorphismus von freien R-Moduln. Beweise oder widerlege folgende Aussagen.

i) Falls φ ein Isomorphismus ist, so gilt $n = m$.

ii) Falls φ surjektiv ist, so gilt $n \geq m$.

iii) Falls φ injektiv ist, so gilt $n \leq m$.

Aufgabe 2:

Seien $I_1, \ldots, I_n$ Ideale in einem Ring R mit $\cap_{k=1}^n I_k = (0)$. Zeige, dass R noethersch ist, falls R/I_k noethersch ist für $k = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 3:

Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, und sei $\varphi : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln, sodass der induzierte Homomorphismus

$$\bar{\varphi} : M/\mathfrak{m}M \longrightarrow N/\mathfrak{m}N$$

injektiv ist. Ferner sei M endlich erzeugt und N projektiv. Zeige, dass M frei ist und φ einen Retrakt besitzt, d.h. es existiert ein Homomorphismus $\psi : N \to M$ mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_M$.

Tip: Betrachte zunächst einen Retrakt zu $\bar{\varphi}$ und konstruiere dazu einen Lift $\psi' : N \to M$. Zeige anschließend, dass $\psi' \circ \varphi$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 4:

Seien M, N zyklische $\mathbb{Z}$-Moduln. Bestimme das Tensorprodukt $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$.

Abgabe: Donnerstag, 25. April 2013.