Prof. Dr. M. Rapoport **SS 2013**
T. Richarz

Algebra I

1. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Seien $A_1, \ldots, A_n$ endlich viele Ringe. Dann besitzt das Produkt $A_1 \times \ldots \times A_n$ zusammen mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation wieder die Struktur eines Ringes. Beschreibe die Ideale (bzw. Primideale) von $A_1 \times \ldots \times A_n$ durch die Ideale (bzw. Primideale) der A_i, $i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 2:
Sei A ein Ring, und seien I, J relativ prime Ideale von A. Zeige, dass I^n, J^m für alle $m, n \geq 1$ relativ prim zueinander sind.

Aufgabe 3:
Sei A ein Ring, und sei $A[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten über A. Sei $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ ein Polynom in $A[X]$. Zeige folgende Aussagen.

i) $f \in A[X]^\times \;\Leftrightarrow\; a_0 \in A^\times$ und $a_1, \ldots, a_n$ nilpotent

ii) f nilpotent $\;\Leftrightarrow\; a_0, \ldots, a_n$ nilpotent

iii) f Nullteiler $\;\Leftrightarrow\; \exists\, a \in A \backslash \{0\}$ mit $a \cdot f = 0$

iv) Das Polynom f heißt primitiv, falls $(a_0, \ldots, a_n) = A$. Zeige, dass das Produkt zweier Polynome genau dann primitiv ist, wenn jeder der Faktoren primitiv ist.

Aufgabe 4:
Sei A ein Ring. Zeige folgende Aussagen über das Nilradikal und das Jacobsonradikal in dem Ring $A[X]$.

i) $\mathrm{Nil}(A[X]) = \mathrm{Nil}(A) \cdot A[X]$

ii) Zeige, dass $\mathrm{Jac}(A[X]) \subset \mathrm{Jac}(A) \cdot A[X]$, und genau dann Gleichheit gilt, wenn $\mathrm{Nil}(A) = \mathrm{Jac}(A)$.

Abgabe: Donnerstag, 18. April 2013.