

7 Der funktorielle Standpunkt

Inhalt

- Schemata als Funktoren
- Das Beispiel der Grassmannschen

In diesem Kapitel ordnen wir jedem Schema einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der Schemata in die Kategorie der Mengen zu. Das Yoneda-Lemma sagt uns dann, dass wir dadurch eine Einbettung der Kategorie der Schemata in die Kategorie solcher Funktoren bekommen. Funktoren, die im essentiellen Bild dieser Einbettung liegen, nennt man darstellbar.

Bei allgemeinen Funktoren F und G fällt es schwer, sie sich als geometrische Objekte vorzustellen. Aber es macht Sinn, davon zu sprechen, dass ein Morphismus $f: F \rightarrow G$ “geometrisch” ist (wir werden solche Morphismen als darstellbar bezeichnen). Wir können dann zum Beispiel von offenen (oder abgeschlossenen) Einbettungen oder auch von Überdeckungen von Funktoren sprechen.

Im zweiten Teil dieses Kapitels werden wir all diese abstrakten Begriffsbildungen am Beispiel der Grassmannschen erläutern.

Notationen

Sind zwei Kategorien \mathcal{C} und \mathcal{D} gegeben, so bedeutet die Schreibweise $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, dass F ein Funktor von \mathcal{C} nach \mathcal{D} ist. Diese Bezeichnung verwenden wir ausschließlich für kovariante Funktoren. Kontravariante Funktoren von \mathcal{C} nach \mathcal{D} schreiben wir als $\mathcal{C}^{\text{opp}} \rightarrow \mathcal{D}$ auf, wobei \mathcal{C}^{opp} die entgegengesetzte Kategorie von \mathcal{C} ist. Sind $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Funktoren, so nennen wir Abbildungen $\alpha(S): F(S) \rightarrow G(S)$ *funktoriell in S* oder einen *Morphismus von Funktoren*, wenn für jedes Objekt $S \in \mathcal{C}$ eine Abbildung $\alpha(S)$ gegeben ist, und für jeden Morphismus $f: T \rightarrow S$ in \mathcal{C} das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(T) & \xrightarrow{\alpha(T)} & G(T) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ F(S) & \xrightarrow{\alpha(S)} & G(S) \end{array}$$

kommutiert. Mit diesem Begriff von Morphismus erhalten wir die Kategorie aller Funktoren von \mathcal{C} nach \mathcal{D} . Wir bezeichnen mit $\widehat{\mathcal{C}}$ die Kategorie der kontravarianten Funktoren von \mathcal{C} in die Kategorie der Mengen.

Wir bezeichnen mit (Sch) die Kategorie der Schemata, mit (Ring) die der (kommutativen) Ringe und mit (Sets) die Kategorie der Mengen. Ist R ein kommutativer Ring, so bezeichne (R -Alg) die Kategorie der R -Algebren, und schließlich sei (Sch/ S_0) die Kategorie der S_0 -Schemata, wenn S_0 ein Schema ist. Ist $S_0 = \text{Spec } R_0$ affin, so schreiben wir auch (Sch/ R_0).

Schemata als Funktoren

(7.1) Funktoren assoziiert zu Schemata.

Der Ausgangspunkt der algebraischen Geometrie ist der Wunsch, Nullstellenmengen von polynomialen Gleichungssystemen zu verstehen. Sind R ein Ring, f_1, \dots, f_m Polynome in $R[T_1, \dots, T_n]$ und A eine R -Algebra, so entsprechen die Lösungen $x \in A^n$ der Gleichungen $f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0$ genau den Homomorphismen $R[T_1, \dots, T_n]/(f_1, \dots, f_m) \rightarrow A$ von R -Algebren, also den $(\text{Spec } R)$ -Morphismen $\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } R[T_1, \dots, T_n]/(f_1, \dots, f_m)$. Diese Überlegung zeigt, dass es natürlich ist, einem Schema X den Funktor

$$\begin{aligned} h_X: (\text{Sch})^{\text{opp}} &\rightarrow (\text{Sets}), \\ S &\mapsto h_X(S) := \text{Hom}_{(\text{Sch})}(S, X), \quad (\text{auf Objekten}), \\ (f: T \rightarrow S) &\mapsto (\text{Hom}_{(\text{Sch})}(S, X) \rightarrow \text{Hom}_{(\text{Sch})}(T, X), g \mapsto g \circ f), \quad (\text{auf Morphismen}) \end{aligned}$$

zuzuordnen. Diese Definition ist deswegen umso nützlicher, weil das Schema X durch den Funktor h_X bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, wie wir in (7.3) sehen werden.

Die Menge $\text{Hom}_{(\text{Sch})}(S, X)$ heißt auch die *Menge der S -wertigen Punkte von X* . Wir schreiben häufig auch einfach $X(S)$ statt $h_X(S) = \text{Hom}_{(\text{Sch})}(S, X)$. Wenn $S = \text{Spec } R$ affin ist, setzen wir außerdem $X(R) := X(\text{Spec } R)$.

Ist allgemeiner $F: (\text{Sch})^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$ ein beliebiger Funktor, so nennen wir $F(S)$ die *Menge der S -wertigen Punkte von F* . Diese Sprechweise legt es nahe, sich alle Funktoren $F: (\text{Sch})^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$ als "geometrische Objekte" vorzustellen (die viel allgemeiner sind als Schemata). Diese Assoziation ist förderlich (auch wenn man sicherlich Zusatzbedingungen stellen muss, damit Funktoren sinnvoll mit einem geometrischen Objekt identifiziert werden können) und wird in der Theorie der algebraischen Räume weiter ausgebaut (vgl. auch Aufgabe 3).

Sei nun S_0 ein festes Schema. Dann können wir statt der Kategorie (Sch) auch die Kategorie (Sch/S_0) der S_0 -Schemata (??) betrachten. Wieder liefert jedes S_0 -Schema X einen Funktor

$$(\text{Sch}/S_0) \longrightarrow (\text{Sets}), \quad S \longmapsto \text{Hom}_{S_0}(S, X).$$

Statt $\text{Hom}_{S_0}(S, X)$ schreiben wir auch kürzer $X_{S_0}(S)$. Ist $S_0 = \text{Spec } R_0$ affin bzw. ist $S = \text{Spec } R$ affin, so schreiben wir wie üblich auch $X_{R_0}(S)$ bzw. $X_{S_0}(R)$ (oder auch $X_{R_0}(R)$, wenn S_0 und S beide affin sind).

Beispiel 7.1. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei X ein integrales k -Schema von endlichem Typ (??). Das Bild $\text{Im}(x)$ jedes k -wertigen Punkts $x: \text{Spec } k \rightarrow X$ ist ein abgeschlossener Punkt des zugrundeliegenden topologischen Raums von X . Die Abbildung $X_k(k) \rightarrow X_0$, $x \mapsto \text{Im}(x)$ ist eine Bijektion von Mengen von $X_k(k)$ auf die zu X assoziierte Varietät (??).

(7.2) Beispiele: Der affine Raum und die multiplikative Gruppe.

Beispiel 7.2. Wir betrachten den affinen Raum: Sei $n \geq 0$ eine ganze Zahl und $X = \mathbb{A}^n = \text{Spec } (\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n])$. Dann gilt für jedes Schema S nach (??):

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{(\text{Sch})}(S, \mathbb{A}^n) &= \text{Hom}_{(\text{Ring})}(\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n], \Gamma(S, \mathcal{O}_S)) = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^n, \\ &\varphi \mapsto (\varphi(T_1), \dots, \varphi(T_n)). \end{aligned}$$

Das heißt, für jedes Schema S gilt $\mathbb{A}^n(S) = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^n$. Insbesondere gilt $\mathbb{A}^n(R) = R^n$ für jeden Ring R .

Beispiel 7.3. Allgemeiner seien ein Ring R und Polynome $f_1, \dots, f_r \in R[T_1, \dots, T_n]$ gegeben. Setze $X = \text{Spec}(R[\underline{T}]/(f_1, \dots, f_r))$. Dann gilt für jedes R -Schema S :

$$\begin{aligned} X_R(S) &= \text{Hom}_{(R\text{-Alg})}(R[\underline{T}]/(f_1, \dots, f_r), \Gamma(S, \mathcal{O}_S)) \\ &= \{s = (s_1, \dots, s_n) \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^n ; f_1(s) = \dots = f_r(s) = 0\}. \end{aligned}$$

Beispiel 7.4. Als drittes Beispiel setzen wir $X = \mathbb{G}_m := \text{Spec } \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$. Dann gilt

$$\text{Hom}_{(\text{Sch})}(S, \mathbb{G}_m) = \text{Hom}_{(\text{Ring})}(\mathbb{Z}[T, T^{-1}], \Gamma(S, \mathcal{O}_S)) = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^\times.$$

Wir haben also insbesondere $\mathbb{G}_m(R) = R^\times$ für jeden Ring R . Das Schema \mathbb{G}_m heißt die *multiplikative Gruppe (über $\text{Spec } \mathbb{Z}$)*.

(7.3) Yoneda-Lemma.

Ist $f: X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata, so induziert für jedes Schema S die Komposition

$$h_f(S): h_X(S) \rightarrow h_Y(S), \quad g \mapsto f \circ g$$

einen Morphismus $h_f: h_X \rightarrow h_Y$ von Funktoren. Damit erhalten wir einen Funktor $X \mapsto h_X$ von der Kategorie (Sch) der Schemata in die Kategorie $\widehat{(\text{Sch})}$ der Funktoren $(\text{Sch})^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$.

Wie für jede Kategorie gilt auch für die Kategorie der Schemata das ‘‘Yoneda-Lemma’’:

Sei $F: (\text{Sch})^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$ ein Funktor, und sei X ein Schema. Sei $\alpha: h_X \rightarrow F$ ein Morphismus von Funktoren, das heißt für alle Schemata Y ist eine in Y funktorielle Abbildung $\alpha(Y): h_X(Y) \rightarrow F(Y)$ gegeben. Dann ist $\alpha(X)(\text{id}_X) \in F(X)$.

Lemma 7.5. (Yoneda-Lemma) *Die Abbildung*

$$\text{Hom}_{\widehat{(\text{Sch})}}(h_X, F) \rightarrow F(X), \quad \alpha \mapsto \alpha(X)(\text{id}_X)$$

ist eine in X funktorielle Bijektion.

Beweis. Für $\xi \in F(X)$ definieren wir $\alpha_\xi(Y): h_X(Y) \rightarrow F(Y)$ durch $f \mapsto F(f)(\xi)$ für $f \in h_X(Y) = \text{Hom}_{(\text{Sch})}(Y, X)$. Dann ist $\xi \mapsto \alpha_\xi$ eine Umkehrabbildung. \square

Wenden wir das Yoneda-Lemma auf den Spezialfall an, dass $F = h_Y$ für ein Schema Y ist, so sehen wir, dass der Funktor $X \mapsto h_X$ eine Bijektion

$$\text{Hom}_{(\text{Sch})}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{(\text{Sch})}}(h_X, h_Y) \tag{7.3.1}$$

induziert. Mit anderen Worten: $X \mapsto h_X$ ist ein volltreuer Funktor $(\text{Sch}) \rightarrow \widehat{(\text{Sch})}$.

Ein Funktor $F: (\text{Sch})^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$ heißt *darstellbar*, wenn ein Schema X und ein Isomorphismus $\xi: h_X \xrightarrow{\sim} F$ existieren. Das Paar (X, ξ) ist dann eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus bestimmt. Mit anderen Worten, F ist darstellbar, wenn er im essentiellen Bild des Funktor $X \mapsto h_X$ liegt.

Im Folgenden werden wir häufig nicht mehr zwischen Schemata X und den sie darstellenden Funktoren h_X unterscheiden.

Aus (7.3.1) folgt, dass die Vorgabe eines Schema-Morphismus $f: X \rightarrow Y$ äquivalent ist zu der Vorgabe von Abbildungen $f(S): X(S) \rightarrow Y(S)$, die funktoriell in S sind.

Häufig ist es möglich, von Eigenschaften der Abbildungen $f(S)$ auf Eigenschaften des Schema-Morphismus f zu schließen und umgekehrt. Wir geben hierfür ein Beispiel. Weitere Beispiele werden wir immer wieder im Folgenden sehen.

(7.4) Ein Surjektivitätskriterium.

Satz 7.6. *Ein Schema-Morphismus $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann surjektiv, wenn für jeden Körper K und für jeden K -wertigen Punkt $y \in Y(K)$ eine Körper-Erweiterung L von K und ein $x \in X(L)$ existieren, so dass $f(L)(x) = y_L$, wobei y_L das Bild von y unter $Y(K) \rightarrow Y(L)$ ist.*

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend: Sei y_0 ein Punkt des zugrundeliegenden topologischen Raums von Y , und sei $y: \text{Spec}(\kappa(y_0)) \rightarrow Y$ der kanonische Morphismus (??). Sei nun $x: \text{Spec}(L) \rightarrow X$ mit $f(L)(x) = y_L$, und sei $x_0 \in X$ der Bildpunkt von x . Dann gilt $f(x) = y$.

Die Bedingung ist notwendig: Sei f surjektiv, sei $y \in Y(K)$, und sei $y_0 \in Y$ der Bildpunkt von y . Es existiert ein $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = y_0$. Betrachte die korrespondierende Erweiterung $\kappa(y_0) \rightarrow \kappa(x_0)$ (??). Wähle eine Körper-Erweiterung L von $\kappa(y_0)$, so dass $\kappa(y_0)$ -Einbettungen von $\kappa(x_0)$ und von K nach L existieren (das Tensorprodukt $\kappa(x_0) \otimes_{\kappa(y_0)} K$ ist, da die Basis ein Körper ist, nicht 0, und ist \mathfrak{m} ein maximales Ideal darin, so können wir $L = (\kappa(x_0) \otimes_{\kappa(y_0)} K)/\mathfrak{m}$ wählen). Dann erfüllt die Komposition $x: \text{Spec}(L) \rightarrow \text{Spec}(\kappa(x_0)) \rightarrow X$ die gewünschten Eigenschaften. \square

Wir geben noch ein Beispiel für dieses Kriterium, das auch zeigt, dass man im Allgemeinen keine Surjektivität auf K -wertigen Punkten für jeden Körper K hat, selbst wenn f surjektiv ist: Sei $r > 1$ eine ganze Zahl und sei $f_r: \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$ auf S -wertigen Punkten gegeben durch

$$f_r(S): \mathbb{G}_m(S) = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^\times \longrightarrow \mathbb{G}_m(S), \quad x \rightarrow x^r.$$

Sei K ein Körper. Dann ist $f_r(K)$ genau dann surjektiv, wenn es möglich ist, aus jedem $x \in K^\times$ die r -te Wurzel zu ziehen. Insbesondere ist $f_r(K)$ surjektiv, wenn K algebraisch abgeschlossen ist, und es folgt aus Satz 7.6, dass f_r surjektiv ist. Aber natürlich gibt es Körper K , so dass $f_r(K)$ nicht surjektiv ist (z. B. $K = \mathbb{R}$ und r gerade, oder $K = \mathbb{Q}$ und $r \geq 2$ beliebig).

Wir haben in (7.2) gesehen, dass \mathbb{A}^n den Funktor $S \mapsto \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^n$ und \mathbb{G}_m den Funktor $S \mapsto \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^\times$ darstellt.

Umgekehrt ist für ein Schema S_0 oft ein Funktor $F: (\text{Sch}/S_0)^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$ gegeben, und man möchte wissen, ob dieser Funktor durch ein S_0 -Schema darstellbar ist.

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, sei $S_0 = \text{Spec } k$. Ist dann F durch ein integres k -Schema von endlichem Typ darstellbar, so ist jedenfalls $F(k)$ die Menge der abgeschlossenen Punkte dieses Schemas, das heißt, wir haben die Menge $F(k)$ mit der Struktur einer Prävarietät versehen.

Die Darstellbarkeit eines Funktors ist im Allgemeinen ein sehr schwieriges Problem. Wir geben im nächsten Abschnitt ein einfaches notwendiges Kriterium für die Darstellbarkeit eines Funktors. In (7.7) werden wir dann auch ein erstes hinreichendes Kriterium zeigen.

(7.5) Zariski-Garben.

Sei $F: (\text{Sch})^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$ ein Funktor. Ist $j: U \rightarrow S$ eine offene Immersion und ist $\xi \in F(S)$ so schreiben wir, ähnlich wie bei Schnitten von Prägarben, auch einfach $\xi|_U$ anstelle von $F(j)(\xi)$.

Wir sagen, dass F eine *Garbe für die Zariski-Topologie* oder kürzer eine *Zariski-Garbe* (auf (Sch)) ist, wenn die üblichen Garbenaxiome gelten, d. h., wenn für jedes Schema S und für jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von S das Garbenaxiom gilt:

(Sh) Seien $\xi_i \in F(U_i)$ für alle $i \in I$ gegeben, so dass $\xi_i|_{(U_i \cap U_j)} = \xi_j|_{(U_i \cap U_j)}$ für alle $i, j \in I$. Dann existiert genau ein $\xi \in F(S)$, so dass $\xi|_{U_i} = \xi_i$ für alle $i \in I$.

Satz 7.7. *Jeder darstellbare Funktor ist eine Garbe für die Zariski-Topologie.*

Beweis. Sei X ein Schema. Wir müssen zeigen, dass $S \mapsto \text{Hom}(S, X)$ eine Garbe für die Zariski-Topologie ist. Aber für jede offene Überdeckung (U_i) von S ist die Vorgabe eines Schema-Morphismus $f: S \rightarrow X$ äquivalent zu der Vorgabe von Schema-Morphismen $f_i: U_i \rightarrow X$, so dass $f_i|(U_i \cap U_j) = f_j|(U_i \cap U_j)$ für alle Indizes i und j (??). \square

Anmerkung 7.8. Später, wenn wir den treuflachen Abstieg behandeln, werden wir sehen, dass darstellbare Funktoren auch Garben für sehr viel "feinere Überdeckungen" als Zariski-Überdeckungen sind (siehe (??)).

(7.6) Darstellbare Morphismen.

Seien F und G zwei Funktoren $(\text{Sch})^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$, und sei $f: F \rightarrow G$ ein Morphismus von Funktoren.

Sei X ein Schema und $g: X \rightarrow G$ ein Morphismus in $\widehat{(\text{Sch})}$. (Wir erinnern daran, dass wir nicht mehr explizit zwischen einem Schema X und dem assoziierten Funktor h_X unterscheiden (7.3).) Wir definieren einen neuen Funktor $F \times_G X$ in $\widehat{(\text{Sch})}$ durch

$$(F \times_G X)(S) := F(S) \times_{G(S)} X(S) := \{ (\varphi, \xi) \in F(S) \times X(S) ; f(S)(\varphi) = g(S)(\xi) \}$$

für jedes Schema S . Da X , F und G funktoriell in S sind, gilt dies auch für $F \times_G X$.

Wir haben die beiden Projektionen

$$F \times_G X \rightarrow F, \quad F \times_G X \rightarrow X,$$

die auf S -wertigen Punkten gegeben sind durch $(\varphi, \xi) \mapsto \varphi$ bzw. durch $(\varphi, \xi) \mapsto \xi$.

Ein Morphismus $f: F \rightarrow G$ zwischen Funktoren in $\widehat{(\text{Sch})}$ heißt *darstellbar*, wenn für alle Schemata X und für jeden Morphismus $g: X \rightarrow G$ in $\widehat{(\text{Sch})}$ der Funktor $F \times_G X$ darstellbar ist.

Sei Z ein Schema, und sei $\zeta: Z \xrightarrow{\sim} F \times_G X$ ein Isomorphismus. Nach dem Yoneda-Lemma (7.3) ist die Komposition von ζ mit der zweiten Projektion $F \times_G X \rightarrow X$ durch einen eindeutigen Schema-Morphismus $Z \rightarrow X$ gegeben, der bis auf Komposition mit einem Isomorphismus unabhängig von der Wahl von (Z, ζ) ist. Damit macht die folgende Sprechweise Sinn.

Sei \mathbf{P} eine Eigenschaft von Schema-Morphismen, so dass die Komposition eines Schema-Morphismus mit der Eigenschaft \mathbf{P} mit einem Isomorphismus von rechts oder von links wieder die Eigenschaft \mathbf{P} besitzt (z. B. könnte \mathbf{P} die Eigenschaft “offene Immersion” oder auch die Eigenschaft “surjektiv” sein). Dann sagen wir, dass ein darstellbarer Morphismus $f: F \rightarrow G$ zwischen Funktoren in $\widehat{(\text{Sch})}$ die Eigenschaft \mathbf{P} besitzt, wenn für alle Schemata X und für jeden Morphismus $g: X \rightarrow G$ die zweite Projektion $f_X: F \times_G X \rightarrow X$ die Eigenschaft \mathbf{P} besitzt.

Anmerkung 7.9. Der Funktor $F \times_G X$ ist nichts anderes als das Faserprodukt von F und X über G in der Kategorie $\widehat{(\text{Sch})}$. Faserprodukte werden im Kapitel ?? ausführlicher studiert. Dort werden wir auch sehen, dass das Faserprodukt von drei darstellbaren Funktoren wieder darstellbar ist. Insbesondere folgt, dass jeder Morphismus zwischen darstellbaren Funktoren darstellbar ist.

Im Allgemeinen ist es nicht richtig, dass, wenn ein Schema-Morphismus $f: X \rightarrow Y$ eine Eigenschaft \mathbf{P} besitzt, auch der assoziierte Morphismus von Funktoren \mathbf{P} besitzt. Dies gilt jedoch für fast alle in der algebraischen Geometrie betrachteten Eigenschaften \mathbf{P} (nämliche für solche Eigenschaften, die stabil unter Basiswechsel sind; siehe ??).

(7.7) Zariski-Überdeckungen von Funktoren.

Wir zeigen nun, dass jede Zariski-Garbe, die eine Zariski-offene Überdeckung durch darstellbare Funktoren besitzt, selbst darstellbar ist. Wir machen dies zuerst präzise:

Sei $F: (\text{Sch})^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$ ein kontravarianter Funktor. Ein *offener Unterfunktor* F' von F ist ein Morphismus $f: F' \rightarrow F$ der darstellbar und eine offene Immersion ist. Nach Definition ist dann für jedes Schema X und für jeden Morphismus $g: X \rightarrow F$ die zweite Projektion $f_X: F' \times_F X \rightarrow X$ eine offene Immersion von Schemata.

Eine Familie $(f_i: F_i \rightarrow F)_{i \in I}$ von offenen Unterfunktoren heißt *Zariski-offene Überdeckung von F* , wenn für jedes Schema X und für jeden Morphismus $g: X \rightarrow F$ die Bilder der $(f_i)_X$ eine Überdeckung von X bilden.

Satz 7.10. Sei $F: (\text{Sch})^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$ ein Funktor, für den gilt:

- (a) F ist eine Garbe für die Zariski-Topologie (7.5).
- (b) F besitzt eine Zariski-offene Überdeckung $(f_i: F_i \rightarrow F)_{i \in I}$ durch darstellbare Funktoren F_i .

Dann ist F darstellbar.

Beweis. Seien die F_i durch Schemata X_i dargestellt. Wir zeigen später, dass eine offene Überdeckung eines Funktors h_X , X ein Schema, dasselbe ist, wie eine offene Überdeckung von X (siehe ??) und Anmerkung 7.9). Ist F also von der Form h_X , so müssen die X_i eine offene Überdeckung von X sein, anders ausgedrückt: X entsteht durch Verkleben der X_i . Wir wollen daher zeigen, dass in unserer Situation ein Verklebedatum für die X_i gegeben ist (?).

Da die Morphismen $F_i \rightarrow F$ darstellbar und offene Immersionen sind, und da offene Immersionen von Schemata Monomorphismen sind, folgt aus dem Yoneda-Lemma, dass für alle S die Abbildung $F_i(S) \rightarrow F(S)$ injektiv ist. Für alle $i, j \in I$ und alle S können wir deshalb $(F_i \times_F F_j)(S)$ mit der Teilmenge $F_i(S) \cap F_j(S) \subseteq F(S)$ identifizieren. Vermöge dieser Identifizierung sind die Funktoren $F_i \times_F F_j$ und $F_j \times_F F_i$ gleich. Es sei $X_{\{i,j\}}$ ein Schema, das diesen Funktor darstellt. In ähnlicher Weise identifizieren wir für $i, j, k \in I$ die Funktoren $F_i \times_F F_j \times_F F_k$, $F_j \times_F F_i \times_F F_k$ etc. und schreiben $F_{\{i,j,k\}}$ dafür.

Für $i, j \in I$ ist die Abbildung $X_{\{i,j\}} \rightarrow X_i$, die von der Projektion $F_i \times_F F_j \rightarrow F_i$ induziert wird, eine offene Immersion, und wir bezeichnen ihr Bild mit U_{ij} . Diese Immersion induziert einen Isomorphismus $\psi_{i,j}: X_{\{i,j\}} \rightarrow U_{ij}$. Wir setzen $\varphi_{ji} = \psi_{j,i} \circ \psi_{i,j}^{-1}: U_{ij} \cong U_{ji}$, und behaupten, dass das Tupel $((X_i)_{i \in I}, (U_{ij}), (\varphi_{ij}))$ ein Verklebedatum ist.

Wir müssen die Kozykelbedingung (??) nachprüfen, nämlich dass für alle $i, j, k \in I$ gilt:

$$\varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} = \varphi_{ki} \text{ auf } U_{ij} \cap U_{jk}. \quad (7.7.1)$$

Für das offene Unterschema $U_{ij} \cap U_{ik}$ von X_i und für alle S gilt $(U_{ij} \cap U_{ik})(S) = U_{ij}(S) \cap U_{ik}(S) = F_{\{i,j,k\}}(S)$, und wir haben kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} U_{ij} \cap U_{ik} & \xrightarrow{\varphi_{ji}|_{U_{ij} \cap U_{ik}}} & U_{ji} \cap U_{jk} \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ F_{\{i,j,k\}} & \xrightarrow{\text{id}} & F_{\{i,j,k\}} \end{array}$$

Es genügt deshalb zu zeigen, dass die Gleichheit (7.7.1) für die entsprechenden Morphismen zwischen den $F_{\{i,j,k\}}$ gilt. Dort ist sie aber offensichtlich, da diese Morphismen nach Konstruktion jeweils der Identitätsmorphismus sind.

Sei X das Schema, das durch Verkleben der X_i bezüglich dieses Verklebedatums entsteht. Da F eine Zariski-Garbe ist, verkleben sich die offenen Immersionen $f_i: X_i \rightarrow F$ zu einem Isomorphismus $f: X \rightarrow F$, also ist F durch X darstellbar. \square

Das Beispiel der Grassmannschen

Wir studieren die oben eingeführten Begriffe nun am Beispiel der Grassmannschen.

(7.8) Definition des Grassmannfunktors.

Seien ganze Zahlen $1 \leq d \leq n$ fixiert. Wir setzen uns als Ziel, die d -dimensionalen Untervektorräume in einem n -dimensionalen Vektorraum zu klassifizieren. Wir wollen also einen darstellbaren Funktor $F_{d,n}: (\text{Sch})^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$ definieren, so dass für jeden Körper k gilt

$$F_{d,n}(\text{Spec } k) = \{ U \subset k^n ; U \text{ ist } d\text{-dimensionaler } k\text{-Untervektorraum} \}.$$

Was ist nun der richtige Ersatz für “ d -dimensionaler Untervektorraum”, wenn wir $F_{d,n}(S)$ definieren wollen, und S nicht das Spektrum eines Körpers ist? Wir starten mit der folgenden Vorbemerkung. Wir würden $F_{d,n}(S)$ gerne als eine Menge von “gewissen” \mathcal{O}_S -Untermoduln $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_S^n$ definieren. Es geht nun darum, dies zu präzisieren. Als erste Minimalvoraussetzung fordern wir, dass diese Untermoduln \mathcal{U} von endlichem Typ sind.

Um $F_{d,n}$ zu einem Funktor zu machen, müssen wir aber auch für jeden Schema-Morphismus $f: T \rightarrow S$ jedem solchen \mathcal{U} einen Untermodul $F_{d,n}(f)(\mathcal{U}) \subset \mathcal{O}_T^n$ zuordnen. Dafür setzen wir an $F_{d,n}(f)(\mathcal{U}) := f^*(\mathcal{U})$. Die Inklusion $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{O}_S^n$ liefert dann via Funktorialität einen \mathcal{O}_T -Modul-Homomorphismus $f^*(\mathcal{U}) \rightarrow f^*(\mathcal{O}_S^n) = \mathcal{O}_T^n$. Dieser ist nach (??) genau dann injektiv für alle f , wenn $\mathcal{O}_S^n/\mathcal{U}$ ein flacher \mathcal{O}_S -Modul ist. Da wir voraussetzen wollten, dass \mathcal{U} von endlichem Typ ist, ist $\mathcal{O}_S^n/\mathcal{U}$ auch von endlicher Präsentation (??), also lokal frei (??).

Wir starten daher mit dem folgenden ersten Definitionsversuch für den Funktor $F_{d,n}$. Für jedes Schema S setzen wir

$$F_{d,n}(S) = \{ \mathcal{U} \subset \mathcal{O}_S^n \text{ freier } \mathcal{O}_S\text{-Untermodul vom Rang } d ; \mathcal{O}_S^n/\mathcal{U} \text{ lokal frei} \}.$$

Für jeden Schema-Morphismus $f: T \rightarrow S$ und für alle $\mathcal{U} \in F_{d,n}(S)$ ist dann $f^*(\mathcal{U}) \in F_{d,n}(T)$. Dazu müssen wir noch zeigen, dass $\mathcal{O}_T^n/f^*(\mathcal{U})$ auch wieder lokal frei ist. Da aber f^* rechtsexakt ist (??), gilt $\mathcal{O}_T^n/f^*(\mathcal{U}) = f^*(\mathcal{O}_S^n/\mathcal{U})$, und der Pullback von lokal freien Moduln ist wieder lokal frei (??).

Aber $F_{d,n}$ ist keine Garbe für die Zariski-Topologie, denn die Eigenschaft, ein freier \mathcal{O}_S -Modul zu sein, ist nicht lokal auf S : Ein Modul, der lokal auf S frei ist, ist nicht notwendigerweise global auf S frei. Wir machen also einen neuen Ansatz und definieren den Grassmann-Funktor

$$\text{Grass}_{d,n}(S) = \{ \mathcal{U} \subset \mathcal{O}_S^n \text{ lokal freier } \mathcal{O}_S\text{-Untermodul vom Rang } d ; \mathcal{O}_S^n/\mathcal{U} \text{ lokal frei} \}.$$

Dieser Funktor ist tatsächlich eine Zariski-Garbe.

Schließlich bemerken wir noch, dass wenn $\mathcal{O}_S^n/\mathcal{U}$ lokal frei ist, die Sequenz $0 \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{O}_S^n \rightarrow \mathcal{O}_S^n/\mathcal{U} \rightarrow 0$ lokal spaltet, das heißt lokal auf S ist \mathcal{U} ein direkter Summand von \mathcal{O}_S^n und damit automatisch lokal frei (??). Eine äquivalente Definition von $\text{Grass}_{d,n}$ ist also

$$\text{Grass}_{d,n}(S) = \{ \mathcal{U} \subset \mathcal{O}_S^n ; \mathcal{O}_S^n/\mathcal{U} \text{ lokal freier } \mathcal{O}_S\text{-Modul vom Rang } n - d \}.$$

In (7.10) werden wir sehen, dass der Funktor $\text{Grass}_{d,n}$ darstellbar ist. Dazu zeigen wir, dass er eine Zariski-Überdeckung durch darstellbare Funktoren besitzt. Diese offenen Unterfunktoren definieren wir jetzt.

(7.9) Offene Unterfunktoren des Grassmannfunktors.

Es seien $1 \leq d \leq n$ ganze Zahlen und eine Teilmenge $I \subset \{1, \dots, n\}$ mit $n - d$ Elementen fixiert. Definiere einen Unterfunktor von $\text{Grass}_{d,n}$ durch

$$\text{Grass}_{d,n}^I(S) := \{ \mathcal{U} \in \text{Grass}_{d,n}(S) ; \mathcal{O}_S^I \hookrightarrow \mathcal{O}_S^n \rightarrow \mathcal{O}_S^n/\mathcal{U} \text{ ist ein Isomorphismus} \}.$$

Dabei ist der erste Pfeil der \mathcal{O}_S -Modul-Homomorphismus $u^I: \mathcal{O}_S^I \rightarrow \mathcal{O}_S^{\{1, \dots, n\}} = \mathcal{O}_S^n$, der durch die Inklusion $I \hookrightarrow \{1, \dots, n\}$ induziert wird. Anders ausgedrückt, $\text{Grass}_{d,n}^I(S)$ besteht aus den $\mathcal{U} \in \text{Grass}_{d,n}(S)$, so dass $\mathcal{U} \oplus \mathcal{O}_S^I = \mathcal{O}_S^n$.

Die Inklusion $\text{Grass}_{d,n}^I(S) \hookrightarrow \text{Grass}_{d,n}(S)$ definiert einen Morphismus von Funktoren

$$\iota^I: \text{Grass}_{d,n}^I \rightarrow \text{Grass}_{d,n}.$$

Lemma 7.11.

- (1) Der Morphismus ι^I ist darstellbar und eine offene Immersion.
(2) Der Funktor $\text{Grass}_{d,n}^I$ ist isomorph zu $\mathbb{A}^{d(n-d)}$, insbesondere ist er darstellbar.

Beweis. zu (1). Sei X ein Schema, und sei $g: X \rightarrow \text{Grass}_{d,n}$ ein Morphismen von Funktoren, das heißt, g ist ein X -wertiger Punkt von $\text{Grass}_{d,n}$, also ein \mathcal{O}_X -Untermodul \mathcal{U} von \mathcal{O}_X^n , so dass $\mathcal{O}_X^n/\mathcal{U}$ ein lokal freier \mathcal{O}_X -Modul vom Rang $n-d$ ist. Sei S ein beliebiges Schema. Dann gilt nach Definition

$$(\text{Grass}_{d,n}^I \times_{\text{Grass}_{d,n}} X)(S) = \{f \in X(S) = \text{Hom}(S, X) ; f^*(\mathcal{U}) \in \text{Grass}_{d,n}^I(S)\}.$$

Um (1) zu beweisen, müssen wir also zeigen, dass ein offenes Unterschema U von X mit der folgenden Eigenschaft existiert: Ein Schema-Morphismus $f: S \rightarrow X$ faktorisiert genau dann durch U , wenn die Komposition $v_f: \mathcal{O}_S^I \rightarrow \mathcal{O}_S^n \rightarrow \mathcal{O}_S^n/f^*(\mathcal{U})$ ein Isomorphismus ist.

Da sowohl Quelle als auch Ziel von v_f lokal freie \mathcal{O}_S -Moduln vom Rang $n-d$ sind, ist v_f genau dann ein Isomorphismus, wenn er ein Epimorphismus ist, d. h. wenn $\text{Coker}(v_f) = 0$ (??).

Betrachte $v_{\text{id}_X}: \mathcal{O}_X^I \rightarrow \mathcal{O}_X^n/\mathcal{U}$. Da $\text{Coker}(v_{\text{id}_X})$ ein \mathcal{O}_X -Modul von endlichem Typ ist, ist sein Träger abgeschlossen (??). Da f^* rechtsexakt ist, gilt $\text{Coker}(v_f) = f^*(\text{Coker}(v_{\text{id}_X}))$. Also hat das offene Unterschema $U := X \setminus \text{Supp}(\text{Coker}(v_{\text{id}_X}))$ die gewünschte Eigenschaft.

zu (2). Sei S ein Schema, und sei $\mathcal{U} \in \text{Grass}_{d,n}^I(S)$. Nach Definition ist $w: \mathcal{O}_S^I \rightarrow \mathcal{O}_S^n/\mathcal{U}$ ein Isomorphismus. Für die Komposition

$$u_{\mathcal{U}}: \mathcal{O}_S^n \rightarrow \mathcal{O}_S^n/\mathcal{U} \xrightarrow{w^{-1}} \mathcal{O}_S^I$$

gilt, dass $u_{\mathcal{U}} \circ u^I$ die Identität von \mathcal{O}_S^I ist.

Sei umgekehrt ein Homomorphismus $u: \mathcal{O}_S^n \rightarrow \mathcal{O}_S^I$ mit $u \circ u^I = \text{id}$ gegeben. Dann ist $\text{Ker}(u) \in \text{Grass}_{d,n}^I(S)$. Wir sehen, dass die Abbildung

$$F(S) := \{u \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S^n, \mathcal{O}_S^I) ; u \circ u^I = \text{id}\} \rightarrow \text{Grass}_{d,n}^I(S), \\ u \mapsto \text{Ker}(u)$$

bijektiv ist. Darüberhinaus ist sie funktoriell in S . Wir erhalten also einen Isomorphismus $F \xrightarrow{\sim} \text{Grass}_{d,n}^I$ von Funktoren.

Wir setzen $J := \{1, \dots, n\} \setminus I$. Dann ist

$$F(S) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S^J, \mathcal{O}_S^I) = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^{J \times I} \cong \mathbb{A}^{d(n-d)}(S), \quad u \mapsto u|_{\mathcal{O}_S^J}$$

eine bijektive Abbildung, die offensichtlich in S funktoriell ist, also $F \cong \mathbb{A}^{d(n-d)}$. \square

(7.10) Beweis der Darstellbarkeit des Grassmannfunktors.

Für jede $(n-d)$ -elementige Teilmenge I von $\{1, \dots, n\}$ haben wir einen offenen Unterfunktors $\text{Grass}_{d,n}^I$ von $\text{Grass}_{d,n}$ definiert und gezeigt, dass dieser darstellbar ist. Wenn wir zeigen, dass diese Familie $(\iota^I: \text{Grass}_{d,n}^I \rightarrow \text{Grass}_{d,n})_I$ von offenen Unterfunktoren eine Zariski-Überdeckung von $\text{Grass}_{d,n}$ ist, folgt aus (7.7) der folgende Satz.

Satz 7.12. *Seien $n \geq d \geq 1$ ganze Zahlen. Dann ist der Funktor $\text{Grass}_{d,n}$ darstellbar.*

Das darstellende Schema bezeichnen wir ebenfalls mit $\text{Grass}_{d,n}$.

Beweis. Sei X ein Schema, und sei $g: X \rightarrow \text{Grass}_{d,n}$ ein Morphismus von Funktoren. Dieser Morphismus entspricht nach dem Yoneda-Lemma (7.3) einem Element $\mathcal{U} \in \text{Grass}_{d,n}(X)$. In (7.9) haben wir gesehen, dass die Unterfunktoren $\text{Grass}_{d,n}^I$ offene Unterschemata U^I von X definieren, und wir haben zu zeigen, dass der durch die offenen Immersionen induzierte Morphismus

$$f: \coprod_I U^I \rightarrow X$$

surjektiv ist. Aber dazu genügt es zu zeigen, dass f auf K -wertigen Punkten surjektiv ist, wobei K ein beliebiger Körper ist (7.4).

Sei $x: \text{Spec}(K) \rightarrow X$ ein K -wertiger Punkt von X . Durch Komposition mit g erhalten wir einen K -wertigen Punkt von $\text{Grass}_{d,n}$. Dieser entspricht gerade dem $\mathcal{O}_{\text{Spec}(K)}$ -Untermodul $x^*(\mathcal{U})$ von $\mathcal{O}_{\text{Spec}(K)}^n$, also einem Untervektorraum U von K^n . Nach Definition liegt x genau dann im Bild von $U^I(K) \rightarrow X(K)$, wenn K^I ein Komplementärraum zu U ist. Aus dem Basis-Austauschsatz der linearen Algebra folgt, dass jede Basis von U durch einen Teil der Standardbasis zu einer Basis von K^n ergänzt werden kann, also existiert immer eine $(n-d)$ -elementige Teilmenge I von $\{1, \dots, n\}$, so dass K^I komplementär zu U ist. Dies wollten wir zeigen. \square

Wir hatten in (7.9) auch gesehen, dass die Funktoren $\text{Grass}_{d,n}^I$ alle isomorph zum affinen Raum $\mathbb{A}^{d(n-d)}$ sind. Wir sehen also:

Korollar 7.13. *Das Schema $\text{Grass}_{d,n}$ besitzt eine endliche Überdeckung durch offene Unterschemata, die isomorph zu $\mathbb{A}^{d(n-d)}$ sind. Insbesondere ist $\text{Grass}_{d,n}$ regulär (??).*

Anmerkung 7.14. In der Tat folgt aus diesem Korollar eine viel stärkere Aussage als die Regularität von $\text{Grass}_{d,n}$, nämlich dass $\text{Grass}_{d,n}$ ein glattes \mathbb{Z} -Schema von relativer Dimension $d(n-d)$ ist (siehe Kapitel ??).

(7.11) Verallgemeinerungen der Grassmannschen.

Bislang haben wir immer Untermoduln von \mathcal{O}_S^n betrachtet. Dies kann wie folgt verallgemeinert werden: Sei S_0 ein Schema und sei \mathcal{E} ein quasikohärenter \mathcal{O}_{S_0} -Modul, und sei $e \geq 0$ eine ganze Zahl. Für jedes S_0 -Schema $h: S \rightarrow S_0$ sei $\text{Grass}^e(\mathcal{E})(S)$ die Menge der \mathcal{O}_S -Untermoduln $\mathcal{U} \subset h^*(\mathcal{E})$, so dass $h^*(\mathcal{E})/\mathcal{U}$ ein lokal freier \mathcal{O}_S -Modul vom Rang e ist. Wie in (7.8) sieht man, dass jeder Morphismus $f: T \rightarrow S$ von S_0 -Schemata eine Abbildung

$$\text{Grass}^e(\mathcal{E})(S) \longrightarrow \text{Grass}^e(\mathcal{E})(T), \quad \mathcal{U} \longmapsto f^*(\mathcal{U})$$

induziert. Wir erhalten somit einen kontravarianten Funktor von der Kategorie der S_0 -Schemata nach (Sets).

Für $S_0 = \text{Spec}(\mathbb{Z})$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbb{Z})}^n$ und $e = n-d$ für $1 \leq d \leq n$ ist $\text{Grass}^e(\mathcal{E}) = \text{Grass}_{d,n}$.

Es ist klar, dass ein Epimorphismus $v: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ von \mathcal{O}_S -Moduln einen Morphismus $i_v: \text{Grass}^e(\mathcal{E}_2) \rightarrow \text{Grass}^e(\mathcal{E}_1)$ induziert. Wenn v ein Isomorphismus ist, so ist auch i_v ein Isomorphismus. Insbesondere folgt aus (7.10), dass $\text{Grass}^e(\mathcal{E})$ darstellbar ist, wenn \mathcal{E} ein freier \mathcal{O}_S -Modul von endlichem Typ ist. Analog wie bei der Definition der Grassmannschen setzen wir $\text{Grass}_d(\mathcal{E}) := \text{Grass}^{n-d}(\mathcal{E})$, wenn \mathcal{E} frei vom Rang n ist.

In der Tat kann man allgemeiner zeigen:

Satz 7.15.

- (1) Für jeden quasikohärenten \mathcal{O}_{S_0} -Modul \mathcal{E} und für alle ganzen Zahlen $e \geq 0$ ist $\text{Grass}^e(\mathcal{E})$ durch ein S_0 -Schema darstellbar.
- (2) Für alle Epimorphismen $v: \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ ist $i_v: \text{Grass}^e(\mathcal{E}_2) \rightarrow \text{Grass}^e(\mathcal{E}_1)$ darstellbar und eine abgeschlossene Immersion.

Man kann den Beweis auf ähnliche Weise wie in (7.9) und (7.10) führen. Für Details sei zum Beispiel auf [?] 9.7 verwiesen.

(7.12) Der projektive Raum als Spezialfall der Grassmannschen.

Wir betrachten nun den Spezialfall $d = 1$. Für jedes Schema S ist dann also $\text{Grass}_{1,n}(S)$ die Menge der lokal direkten Summanden \mathcal{L} von \mathcal{O}^n vom Rang 1. Insbesondere gilt für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper k , dass $\text{Grass}_{1,n}(k) = \mathbb{P}^{n-1}(k)$. In der Tat werden wir jetzt sehen, dass $\text{Grass}_{1,n} = \mathbb{P}^{n-1}$.

Für $i \in \{1, \dots, n\}$ sei $I_i = \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ und setze $U_i := \text{Grass}_{1,n}^{I_i}$. Nach (7.9) sind die U_i offene Unterschemata von $\text{Grass}_{1,n}$, und $U_i(S)$ besteht gerade aus den $\mathcal{L} \in \text{Grass}_{1,n}(S)$, die lokal auf S durch $(x_1, \dots, x_n) \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^n$ mit $x_i \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^\times$ erzeugt werden. Der im Beweis von Lemma 7.11 konstruierte Isomorphismus $U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^{n-1}$ ist auf S -wertigen Punkten gegeben durch

$$U_i \ni \langle x_1, \dots, x_n \rangle \mapsto \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

Es folgt aus der Definition von \mathbb{P}^{n-1} (??), dass sich die Isomorphismen $U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^{n-1} \xrightarrow{\sim} D_+(T_{i-1}) \subset \mathbb{P}^{n-1}$ zu einem Isomorphismus $\text{Grass}_{1,n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^{n-1}$ verkleben.

(7.13) Die Plücker-Einbettung.

Für $n \geq d \geq 1$ ist die d -te äußere Potenz $\bigwedge_{\mathcal{O}_S}^d (\mathcal{O}_S^n)$ ein freier \mathcal{O}_S -Modul vom Rang $\binom{n}{d}$. Ist $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_S^n$ ein lokal direkter Summand vom Rang d , so ist $\bigwedge_{\mathcal{O}_S}^d (\mathcal{U})$ ein lokal direkter Summand von $\bigwedge_{\mathcal{O}_S}^d (\mathcal{O}_S^n)$ vom Rang 1. Wir erhalten einen Morphismus von Funktoren

$$\varpi: \text{Grass}_{d,n} \longrightarrow \text{Grass}_1 \left(\bigwedge^d (\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbb{Z})}^n) \right) \cong \mathbb{P}^{\binom{n}{d}-1}.$$

Dabei gilt der Isomorphismus nach (7.12). Beide Seiten sind darstellbare Funktoren, also ist ϖ ein Morphismus von Schemata, den wir die *Plücker-Einbettung* nennen. Es gilt:

Satz 7.16. *Die Plücker-Einbettung ist eine abgeschlossene Immersion.*

Beweis. Sei $\mathcal{U} \in \text{Grass}_{d,n}(S)$. Da \mathcal{U} lokal ein direkter Summand ist, ist die zur Inklusion $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{O}_S^n$ duale Abbildung $\mathcal{F}_S := (\mathcal{O}_S^n)^* \rightarrow \mathcal{U}^*$ ein Epimorphismus. Sei $G(S)$ die Menge der lokal freien Quotienten von \mathcal{F}_S vom Rang d . Dann liefert $\mathcal{U} \mapsto \mathcal{U}^*$ einen Isomorphismus $\text{Grass}_{d,n} \xrightarrow{\sim} G$ von Funktoren. Insbesondere ist G darstellbar. Genauso sei $P(S)$ die Menge der Quotienten von $\bigwedge^d \mathcal{F}_S = (\bigwedge^d \mathcal{O}_S^n)^*$ vom Rang 1. Dann liefert $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}^*$ einen Isomorphismus $\text{Grass}_1(\bigwedge^d(\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbb{Z})}^n)) \xrightarrow{\sim} P$. Vermöge dieser Isomorphismen identifiziert sich die Plücker-Einbettung mit

$$\pi(S): G(S) \longrightarrow P(S), \quad \mathcal{V} \longmapsto \bigwedge^d \mathcal{V},$$

und es genügt zu zeigen, dass $\pi: G \rightarrow P$ eine abgeschlossene Immersion ist. Wir identifizieren im Folgenden \mathcal{F}_S mit \mathcal{O}_S^n via der Standardbasis.

Sei $J \subset \{1, \dots, n\}$ eine Teilmenge mit d Elementen. Wir definieren Unterfunktoren G_J von G und P_J von P durch

$$G_J(S) = \{ \mathcal{V} \in G(S) ; \mathcal{O}_S^J \hookrightarrow \mathcal{O}_S^n \rightarrow \mathcal{V} \text{ ist ein Isomorphismus} \},$$

$$P_J(S) = \{ \mathcal{L} \in P(S) ; \bigwedge^d \mathcal{O}_S^J \hookrightarrow \bigwedge^d \mathcal{O}_S^n \rightarrow \mathcal{L} \text{ ist ein Isomorphismus} \}$$

Wie in (7.9) und (7.10) sieht man, dass die Familien $(G_J \hookrightarrow G)_J$ und $(P_J \hookrightarrow P)_J$ Zariski-Überdeckungen sind. Da ein Homomorphismus u zwischen lokal freien Moduln vom Rang d genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $\bigwedge^d(u)$ ein Isomorphismus ist, ist $\mathcal{V} \in G(S)$ genau dann in $G_J(S)$, wenn sein Bild unter π in $P_J(S)$ liegt. Es folgt, dass G_J das Urbild des offenen Unterschemas P_J unter π ist. Da die Eigenschaft, eine abgeschlossene Immersion zu sein, lokal auf dem Ziel ist (??), genügt es also zu zeigen, dass die Einschränkung $\pi_J: G_J \rightarrow P_J$ von π eine abgeschlossene Immersion ist.

Sei nun $I := \{1, \dots, n\} \setminus J$. Für $\mathcal{V} \in G_J(S)$ sei $v_{\mathcal{V}}$ der Isomorphismus $\mathcal{O}_S^J \hookrightarrow \mathcal{O}_S^n \rightarrow \mathcal{V}$. Dann ist

$$G_J(S) \ni \mathcal{V} \mapsto (\mathcal{O}_S^I \hookrightarrow \mathcal{O}_S^n \xrightarrow{v_{\mathcal{V}}^{-1}} \mathcal{O}_S^J) \in G'_J := \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S^I, \mathcal{O}_S^J)$$

eine in S funktorielle Bijektion. Desgleichen können wir $P_J(S)$ mit $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}, \bigwedge^d(\mathcal{O}_S^J))$ identifizieren, wenn \mathcal{E} ein Komplement von $\bigwedge^d(\mathcal{O}_S^J)$ in $\bigwedge^d(\mathcal{O}_S^n)$ ist. Da \mathcal{O}_S^I ein Komplement von \mathcal{O}_S^J in \mathcal{O}_S^n ist, gilt aber

$$\bigwedge^d \mathcal{O}_S^n = \bigoplus_{i=0}^d \mathcal{E}_i, \quad \mathcal{E}_i := (\bigwedge^{d-i} \mathcal{O}_S^J \otimes \bigwedge^i \mathcal{O}_S^I).$$

Wir wählen daher $\mathcal{E} := \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{E}_i$ und können $P_J(S)$ mit

$$P'_J(S) := \bigoplus_{i=1}^d \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}_i, \bigwedge^d(\mathcal{O}_S^J))$$

identifizieren. Da die \mathcal{O}_S -Moduln \mathcal{E}_i für alle i frei sind, sehen wir dass $P'_J \cong \mathbb{A}^N$ für $N = \text{rk}(\mathcal{E}_1) + \dots + \text{rk}(\mathcal{E}_d)$ ist.

Via der Identifikationen von G_J mit G'_J und von P_J mit P'_J ist π dann gegeben durch $G'_J(S) \ni u \mapsto \pi(u) =: (u_i)_{1 \leq i \leq d} \in P'_J(S)$ mit

$$u_i: \mathcal{E}_i \longrightarrow \bigwedge^d (\mathcal{O}_S^J), \quad x \otimes y \mapsto x \wedge \left(\bigwedge^i (u) \right) (y)$$

für $x \in \left(\bigwedge^{d-i} \mathcal{O}_S^J \right) (U)$ und $y \in \left(\bigwedge^i \mathcal{O}_S^I \right) (U)$, U offen in S .

Nun ist u durch die erste Komponente u_1 von $\pi(u)$ schon eindeutig bestimmt, denn unter dem Isomorphismus

$$\begin{aligned} \alpha: \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S^I, \mathcal{O}_S^J) &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(\bigwedge^{d-1} \mathcal{O}_S^J \otimes \mathcal{O}_S^I, \bigwedge^d \mathcal{O}_S^J \right), \\ v &\longmapsto (x \otimes y \mapsto x \wedge v(y)) \end{aligned}$$

korrespondiert u zu u_1 . Es folgt also, dass wir $G'_J(S)$ gerade mit den Tupeln $(u_i) \in P'_J(S)$ identifizieren können, so dass für alle $i = 2, \dots, d$ gilt

$$u_i(x \otimes y) = x \wedge \left(\bigwedge^i \alpha^{-1}(u_1) \right) (y).$$

Also ist $G'_J(S) \cong \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^{(n-d)d}$ in $P'_J(S) \cong \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^N$ die Verschwindungsmenge gewisser Polynome mit ganzen Koeffizienten, die von S unabhängig sind, da wir die Gleichheit wegen der Bilinearität in x und y nur für die Standard-Basisvektoren überprüfen müssen. Mit anderen Worten, G'_J ist ein abgeschlossenes Unterschema von P'_J . \square

Bemerkung 7.17. Aus dem Satz folgt also insbesondere, dass $\operatorname{Grass}_{d,n}$ isomorph zu einem abgeschlossenen Unterschema von \mathbb{P}^N mit $N = \binom{n}{d} - 1$ ist. Also ist $\operatorname{Grass}_{d,n}$ ein projektives \mathbb{Z} -Schema (vergleiche Kapitel ??).

Übungen

Aufgabe 1. Sei (Aff) die Kategorie der affinen Schemata. Wir nennen einen kontravarianten Funktor $F: (\operatorname{Aff})^{\operatorname{opp}} \rightarrow (\operatorname{Sets})$ eine Zariski-Garbe auf (Aff) , wenn für jedes affine Schema $S = \operatorname{Spec} R$ und für jede endliche offene Überdeckung $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$, wobei U_i von der Form $D(f_i)$ für ein $f_i \in R$ ist, das Garbenaxiom (Sh) in (7.5) gilt. Durch Einschränkung eines Funktors von (Sch) auf (Aff) erhält man einen Funktor von der Kategorie $\operatorname{Sh}_{/(\operatorname{Sch})}$ der Zariski-Garben auf (Sch) in die Kategorie $\operatorname{Sh}_{/(\operatorname{Aff})}$ der Zariski-Garben auf (Aff) . Zeige, dass dies eine Kategorienäquivalenz von $\operatorname{Sh}_{/(\operatorname{Sch})}$ und $\operatorname{Sh}_{/(\operatorname{Aff})}$ induziert.

Aufgabe 2 \diamond . Wir erinnern, dass ein Morphismus $f \in \operatorname{Hom}(T, S)$ in einer Kategorie \mathcal{C} *Epimorphismus* heißt, wenn für alle Objekte X in \mathcal{C} die durch f induzierte Abbildung $X(S) \rightarrow X(T)$ injektiv ist.

- Sei F in (Sch) ein darstellbarer Funktor, und sei $f: T \rightarrow S$ ein Epimorphismus von Schemata. Zeige, dass $F(f): F(S) \rightarrow F(T)$ injektiv ist.
- Sei $(f, f^b): T \rightarrow S$ ein Schema-Morphismus, so dass f surjektiv und $f^b: \mathcal{O}_S \rightarrow f_*(\mathcal{O}_T)$ injektiv ist. Dann ist (f, f^b) ein Epimorphismus.
- Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung eines Schemas S . Dann ist der durch die offenen Einbettungen $U_i \hookrightarrow S$ induzierte Morphismus $\coprod_i U_i \rightarrow S$ ein Epimorphismus.
- Sei L eine Körpererweiterung eines Körpers K . Dann ist der korrespondierende Morphismus $\operatorname{Spec} K \rightarrow \operatorname{Spec} L$ ein Epimorphismus.

Anmerkung: Wir werden in Kapitel ?? sehen, dass jeder treuflache, quasikompakte Morphismus ein Epimorphismus ist.

Aufgabe 3◀. Eine Motivation zur Einführung des Schemabegriffs war die “Globalisierung” von Ringen, d. h., wir wollten “ein Objekt” definieren, das lokal wie ein Ring aussieht. Dazu haben wir aus Ringen geringte Räume (affine Schemata) gemacht, und dann Schemata definiert als geringte Räume, die lokal isomorph zu affinen Schemata sind. Diesen Umweg über die geringten Räume könnte man auch wie folgt umgehen.

- (a) Definiere, wann ein kovarianter Funktor $F: (\text{Ring}) \rightarrow (\text{Sets})$ darstellbar heißt und wann er eine Zariski-Garbe ist (siehe auch Aufgabe 1). Definiere, was eine (nicht notwendig endliche) Zariski-Überdeckung von F ist.
- (b) Zeige, dass die Kategorie der kovarianten Funktoren $F: (\text{Ring}) \rightarrow (\text{Sets})$, die eine Zariski-Garbe sind und die eine Zariski-Überdeckung durch darstellbare Funktoren besitzen, äquivalent zur Kategorie der Schemata ist.
- (c) Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl, und sei $(\text{MgfStandard})_n$ die Kategorie der offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n . Morphismen sind differenzierbare Abbildungen zwischen solchen offenen Teilmengen. Definiere auch hier, was es für einen kontravarianten Funktor $F: (\text{MgfStandard})_n^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$ heißt, darstellbar zu sein (bzw. eine Garbe für die reell analytische Topologie zu sein, bzw. eine reell analytische Überdeckung durch darstellbare Funktoren zu besitzen).

Zeige, dass die Kategorie der Funktoren, die eine reell analytische Garbe sind und die eine reell analytische Überdeckung durch darstellbare Funktoren besitzen, äquivalent zur Kategorie der (nicht notwendigerweise Hausdorffschen) n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten ist.

Aufgabe 4. Sei S ein Schema, und sei $v: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ ein Homomorphismus von quasikohärenten \mathcal{O}_S -Moduln. Sei \mathcal{F} lokal frei von endlichem Typ. Zeige, dass der Ort, wo $v = 0$ ist, abgeschlossen ist, das heißt, dass der Funktor $F: (\text{Sch})^{\text{opp}} \rightarrow (\text{Sets})$, $F(T) = \{f \in \text{Hom}(T, S) ; f^*(v) = 0\}$ durch ein abgeschlossenes Unterschema von S dargestellt wird.

Aufgabe 5. Seien $n \geq d \geq 1$ ganze Zahlen.

- (a) Sei S_0 ein Schema. Betrachte den Funktor

$$(\text{Sch}/S_0)^{\text{opp}} \longrightarrow (\text{Sets}), \quad (S \rightarrow S_0) \mapsto \text{Grass}_{d,n}(S).$$

Zeige, dass er durch ein S_0 -Schema dargestellt wird, das im Folgenden mit $(\text{Grass}_{d,n})_{S_0}$ bezeichnet wird.

- (b) Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass $(\text{Grass}_{d,n})_{(\text{Spec } k)}$ ein integrales reguläres k -Schema von endlichem Typ ist.

Die Punkte der zu $(\text{Grass}_{d,n})_{(\text{Spec } k)}$ assoziierten Prävarietät $\text{Grass}_{d,n}(k)$ entsprechen dann gerade den d -dimensionalen Untervektorräumen des k^n .

- (c) Begründe, warum man die Punkte von $\text{Grass}_{d,n}(k)$ auch als $(d-1)$ -dimensionale lineare Unterräume des $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ auffassen kann (siehe (1.27)).

Aufgabe 6. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Seien $n \geq d \geq 1$ ganze Zahlen, und sei $T = T_d(n)$ die Menge der d -elementigen Teilmengen $J \subset \{1, \dots, n\}$. Es sei $\mathbb{P}(k^T)$ der projektive Raum der Ursprungsgeraden in k^T .

- (a) Für jede Matrix $A \in \text{Mat}_{n \times d}(k) \cong \mathbb{A}^{nd}(k)$ sei U_A der von den Spaltenvektoren aufgespannte Untervektorraum von k^n . Zeige, dass $V = \{A \in \text{Mat}_{n \times d}(k) ; A \text{ hat Rang } d\}$ eine offene Untervarietät von $\text{Mat}_{n \times d}(k)$ ist, und dass die Abbildung $V \rightarrow \text{Grass}_{d,n}(k)$, $A \mapsto U_A$ ein Morphismus von Varietäten ist.

- (b) Für $J \in T_d(n)$ und $A \in \text{Mat}_{n \times d}(k)$ sei $A_J \in \text{Mat}_{d \times d}(k)$ die Matrix, die nur aus den j -ten Zeilen von A für $j \in J$ besteht. Zeige, dass der Morphismus $V \rightarrow \mathbb{A}^T(k)$, $A \mapsto (\det(A_J))_{J \in T}$ die Plücker-Einbettung $\varpi(k): \text{Grass}_{d,n}(k) \rightarrow \mathbb{P}(k^T)$ induziert.
- (c) Seien x_J für $J \in T_d(n)$ die Koordinaten auf $\mathbb{P}(k^T)$. Für paarweise verschiedene Zahlen $j_1, \dots, j_d \in \{1, \dots, n\}$ sei $J = \{j_1, \dots, j_d\}$ und $x_{j_1, \dots, j_d} = \varepsilon x_J$, wobei $\varepsilon = \varepsilon(j_1, \dots, j_d)$ das Signum der Permutation σ von $\{1, \dots, d\}$ ist, so dass $j_{\sigma(1)} < \dots < j_{\sigma(d)}$. Zeige, dass das Bild der Plücker-Einbettung gerade die abgeschlossene Untervarietät vom $\mathbb{P}(k^T)$ ist, die durch die quadratischen homogenen Polynome

$$x_{i_1, \dots, i_d} x_{j_1, \dots, j_d} - \sum x_{i'_1, \dots, i'_d} x_{j'_1, \dots, j'_d}$$

gegeben ist, wobei sich die Summe über die Paare von d -Tupeln (i'_1, \dots, i'_d) und (j'_1, \dots, j'_d) erstreckt, die man erhält, wenn man eine feste Menge von ℓ der Indices j_1, \dots, j_d mit ℓ der Indices i_1, \dots, i_d vertauscht.

- (d) Folgere, dass die Plücker-Einbettung $\text{Grass}_{2,4}(k)$ mit der Quadrik im $\mathbb{P}^{T_2(4)}(k) \cong \mathbb{P}^5(k)$ identifiziert, die durch das homogene Polynom $x_{\{1,2\}}x_{\{3,4\}} - x_{\{1,3\}}x_{\{2,4\}} + x_{\{2,3\}}x_{\{1,4\}}$ definiert wird.

Aufgabe 7. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wir bezeichnen mit \mathcal{G} die Grassmann-Varietät $\text{Grass}_{2,4}(k)$ über k . Wir betrachten \mathcal{G} als Varietät, d. h. mit Punkten sind stets abgeschlossene Punkte gemeint.

- (a) Sei $p \in \mathbb{P}^3(k)$, und $H \subset \mathbb{P}^3(k)$ eine Ebene, die p enthält. Sei $\Sigma_{p,H} \subset \mathcal{G}$ die Menge der Geraden in $\mathbb{P}^3(k)$, die durch p gehen und in H liegen. Zeige, dass $\Sigma_{p,H}$ unter der Plücker-Einbettung $\iota: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{P}^5(k)$ auf eine Gerade in $\mathbb{P}^5(k)$ abgebildet wird, und dass man alle Geraden, die im Bild von ι liegen, auf diese Weise erhält.
- (b) Zu $p \in \mathbb{P}^3(k)$ sei $\Sigma_p \subset \mathcal{G}$ die Menge der Geraden in $\mathbb{P}^3(k)$, die p enthalten. Zu einer Ebene $H \subset \mathbb{P}^3(k)$ sei $\Sigma_H \subset \mathcal{G}$ die Menge der Geraden, die in H enthalten sind. Zeige: Σ_p und Σ_H werden unter der Plücker-Einbettung ι auf Ebenen im $\mathbb{P}^5(k)$ abgebildet, und jede Ebene im $\mathbb{P}^5(k)$, die im Bild von ι enthalten ist, hat die Form Σ_p oder Σ_H .