Einführung in die Algebra — Übungsblatt 5

Prof. Dr. Catharina Stroppel, Dr. Martin Palmer-Anghel (Assistent) // Wintersemester 17/18

[**Abgabe**: 16. November 2017, **vor** der Vorlesung, 10:00 – 10:15]

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass $R[t]$ auch ein Integritätsbereich ist.
(b) Sei im folgenden K ein Körper. Zeigen Sie, dass dann $K[t]$ ein Hauptidealring ist.
(c) Zeigen Sie, dass $K[t_1, \ldots, t_n]$ für $n \geqslant 2$ jedoch kein Hauptidealring ist.
(d) Zeigen Sie, dass der Polynomring $\mathbb{Z}[t]$ ebenfalls kein Hauptidealring ist.

Aufgabe 2. (5 Punkte)

Sei $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \subseteq \mathbb{C}$ die Menge der Gaußschen Zahlen: $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{x + y\mathrm{i} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist, und ferner, dass es ein Integritätsbereich ist.
(b) Die Betragsfunktion $|\ |\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $|x + y\mathrm{i}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Zeigen Sie: $|zw| = |z|\,|w|$ für $z, w \in \mathbb{C}$, und $|z| = 0$ dann und nur dann, wenn $z = 0$.
(c) Zeigen Sie ferner: für jede $z \in \mathbb{C}$ gibt es $b \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, so dass $|z - b| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.
(d) Sei I ein Ideal in $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, $I \neq \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$\{|a| \mid a \in I, a \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}$$

ein kleinstes Element r hat.
(e) Sei jetzt $a \in I$, $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass es für jedes $g \in I$ mit $|g| = r$ ein Element $b \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ gibt, so dass $|a - bg| < r$.
(f) Folgern Sie, dass $a = bg$.
(g) Folgern Sie schließlich, dass $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ ein Hauptidealring ist.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Für die folgenden Ringe R, beschreiben Sie alle maximalen Ideale:

(a) $R = K$ ein Körper,
(b) $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,
(c) $R = K[t]$ für einen algebraisch abgeschlossenen Körper K,
*(d) $R = \mathbb{R}[t]$.

Aufgabe 4. (6 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ eine Teilmenge, so dass $1_R \in S$ und $a, b \in S \Rightarrow a \cdot b \in S$.

(a) Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ auf $R \times S$,

$$(a, b) \sim (a', b') \qquad \text{wenn} \qquad \exists s \in S \quad \text{mit} \quad s \cdot (a \cdot b' - a' \cdot b) = 0_R,$$

eine Äquivalenzrelation ist.

Wir bezeichnen mit $S^{-1}R$ die Menge der Äquivalenzklassen für diese Äquivalenzrelation, und schreiben $[a, b]$ für die Äquivalenzklasse von (a, b).

(b) Zeigen Sie, dass $S^{-1}R$ zu einem kommutativen Ring $(S^{-1}R, +, \cdot)$ wird, mit den Operationen $[a, b]+[c, d] = [ad+bc, bd]$ und $[a, b]\cdot[c, d] = [ac, bd]$. (Zeigen Sie zuerst, dass diese Operationen überhaupt wohldefiniert sind.)

(c) Wenn R ein Integritätsbereich ist können wir $S = R \setminus \{0_R\}$ nehmen (warum?). In diesem Fall schreiben wir $\mathrm{Quot}(R) := S^{-1}R$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Quot}(R)$ ein Körper ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Ringe $\mathrm{Quot}(\mathbb{Z})$ und $\mathbb{Q}$ isomorph (als Ringe) sind.

*(e) Sei $S = \{p^k \mid k \geqslant 0\}$, für eine Primzahl p. Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$\{r \in \mathbb{Q} \mid r = ap^{-k} \text{ für } a, k \in \mathbb{Z} \text{ mit } k \geqslant 0\} \subseteq \mathbb{Q}$$

ein Unterring ist, und dass er isomorph als Ring zu $S^{-1}\mathbb{Z}$ ist.

NB: Wenn ein Teil einer Aufgabe mit dem Symbol $*$ versehen wird, zeigt dies, dass dieser Teil etwas anspruchsvoller sein sollte.

Allgemeine Instruktionen.

- Die Abgabe ist in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte geben Sie immer Name und Tutorium von jedem Gruppenmitglied an.
- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.
- Die neuen Übungsblätter können immer Donnerstags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung (math.uni-bonn.de/people/palmer/A1.html) heruntergeladen werden.
- Lösungen zu den Übungszettel müssen Donnerstags **vor** der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden. Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.
- Für die Zulassung zur Klausur sind mindestens 50% der Übungspunkte erforderlich.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten. Mehr Details zur Vorlesung finden Sie auf der oben genannten Homepage.