Gegeben $U \subseteq \mathbb{R}^n$.
$f: U \to \mathbb{R}$.

Ziel: Finde (lokale) Minima und Maxima von f.

Erinnerung: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offenes Intervall, so gilt $f =: g: U \to \mathbb{R}$ differenzierbar:

Ist $x \in U$ lokales Min/Max so gilt $g'(x) = 0$

Ist g bei x zweimal differenzierbar so folgt aus $g''(x) < 0$, dass x lokales Maximum und aus $g''(x) > 0$, dass x lokales Minimum ist.

! Ist U nicht offen, so muss man den Rand von U separat auf Minima/Maxima überprüfen.

Um dies zu verallgemeinern müssen wir zuerst die Analoge von Intervallen etwas untersuchen:

Def Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir die <u>ε-Umgebung von x</u>

$$U_\varepsilon(x) = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid |x - v| < \varepsilon \}.$$

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein $x \in U$ heißt <u>innerer Punkt von U</u>, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass

$$U_\varepsilon(x) \subseteq U.$$

Ein $x \in \mathbb{R}^n - U$ heißt <u>äußerer Punkt von U</u> falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass

$$U_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{R}^n - U.$$

Ein $x \in \mathbb{R}^n$ heißt <u>Randpunkt von U</u> falls er weder ein innerer noch ein äußerer Punkt von U ist. Das heißt für jedes $\varepsilon > 0$ enthält $U_\varepsilon(x)$ sowohl Punkte aus U als auch aus $\mathbb{R}^n - U$.

Wir setzen

$\mathring{U} = \{ \text{innere Punkte von } U \}$ <u>Innere von U</u>

$\bar{U} = \mathbb{R}^n - \{ \text{äußere Punkte von } U \}$ <u>Abschluss von U</u>

$\partial U = \{ \text{Randpunkte von } U \}.$ <u>Rand von U</u>.

Beobachtung: Es gelten

$$\bar{U} - \partial U = \mathring{U} \subseteq U \subseteq \bar{U} = \mathring{U} \cup \partial U.$$

Def U heißt offen falls $U = \mathring{U}$ und
abgeschlossen falls $U = \overline{U}$.

U ist also offen bzw. abgeschlossen wenn es keinen bzw jeden seiner Randpunkte enthält.

Beobachtung

Es gelten

- das Innere von U ist offen, $\rightsquigarrow \mathring{(\mathring{U})} = \mathring{U}$
- der Abschluss abgeschlossen, $\rightsquigarrow \overline{(\overline{U})} = \overline{U}$
- $\overline{\partial U} = \partial U$, $\partial \mathring{U} = \emptyset$, $\rightsquigarrow \partial\partial U = \partial U$.

Bsp • $a, b \in \mathbb{R}$

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathring{[a,b]} =]a,b[, \quad \overline{]a,b[} = [a,b],$$

$$\partial]a,b[= \partial [a,b] = \{a,b\}.$$

• $a \in \mathbb{R}$

$$\rightsquigarrow [a,\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$]a,\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$\mathring{[a,\infty[} =]a,\infty[, \quad \overline{]a,\infty[} = [a,\infty[$$

$$\partial [a,\infty[= \partial]a,\infty[= \{a\}$$

Im allgemeinen aber aufpassen: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathring{\mathbb{Z}} = \emptyset, \quad \partial \mathbb{Z} = \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$$

$$\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset, \quad \partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

$$\mathring{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}, \quad \partial \mathbb{R} = \emptyset.$$

- Setze für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$

$$D_\varepsilon(x) = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid |x-v| \le \varepsilon \}$$

und $S_\varepsilon(x) = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid |x-v| = \varepsilon \}$

$$\mathring{D}_\varepsilon(x) = U_\varepsilon(x), \quad \overline{U_\varepsilon(x)} = D_\varepsilon(x)$$

$$\partial U_\varepsilon(x) = \partial D_\varepsilon(x) = S_\varepsilon(x)$$

- Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ so gilt

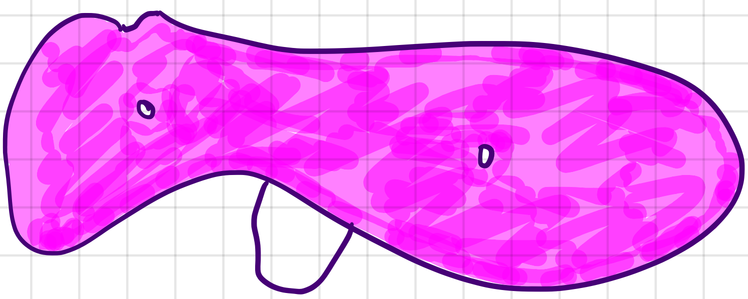
$$(\mathbb{R}^n - X)^\circ = \mathbb{R}^n - \overline{X}, \quad \overline{\mathbb{R}^n - X} = (\mathbb{R}^n - \mathring{X})$$

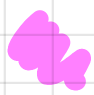
$$\partial(\mathbb{R}^n - X) = \partial X.$$

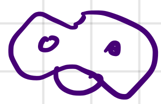
- Ist etwa $X \subseteq \mathbb{R}^n$ endlich so gilt

$$(\mathbb{R}^n - X)^\circ = \mathbb{R}^n - X, \quad \overline{(\mathbb{R}^n - X)} = \mathbb{R}^n$$

$$\partial(\mathbb{R}^n - X) = X$$

- 

$\rightsquigarrow$ $\mathring{(-)} =$ 

$\partial(-) =$ 

Sei jetzt $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^m$ und $v \in \mathbb{R}^n$, $x \in U$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$U_\varepsilon(x) \subseteq U$$

$$f_{v,x}: \left]-\varepsilon/|v|, \varepsilon/|v|\right[\longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$t \longmapsto f(x+tv)$$

ist wohl-definiert (wo man $\varepsilon/|v| = \infty$ für $v=0$ lese).

__Def__ Sind die Komponentenfunktionen

$$f^i_{x,v}: \left]-\varepsilon/|v|, \varepsilon/|v|\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

von $f_{x,v}$ allesamt differenzierbar bei 0, so sagt man f sei __bei x partiell in Richtung v differenzierbar__. Das Vektor

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) \in \mathbb{R}^m \quad \text{mit } i\text{-ter Komponente } \left(f^i_{x,v}\right)'(0)$$

heißt die __partielle Ableitung von f bei x in Richtung v__.

Ist f für jeden Punkt $x \in U$ in alle Richtungen differenzierbar so ergeben sich Funktionen

$$\frac{\partial f}{\partial v}: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

Bsp: $n=1$, $m=1$, $f: U \to \mathbb{R}$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x) = \lambda \cdot f'(x)$$

Γ

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x) = f_{\lambda,x}'(0), \quad f_{\lambda,x}(t) = f(x+\lambda t)$$

Kettenregel: $f_{\lambda,x}'(0) = f'(x+\lambda \cdot 0) \cdot \lambda$ $\lrcorner$

Bem: Es gilt allgemein $\frac{\partial f}{\partial \lambda v}(x) = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(x)$
(Kettenregel)

$\rightsquigarrow$ Nehmen oft $|v| = 1$ an.

Das obere Beispiel hatte auch nichts mit $m=1$ zu tun: $f: \mathbb{R} \supseteq U \to \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial f}{\partial 1}(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix}.$$

Def Für $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-te Zeile, setze

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(x) =: \partial_i f(x)$$

Man berechnet $\partial_i f(x)$ indem man in $x = (x_1, \ldots, x_n)$ alle Einträge außer x_i als konstant betrachtet und „nach x_i ableitet".

Bsp

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$(x,y) \longmapsto 4x \cdot \sin(x+y)$$

$$\rightsquigarrow (\partial_1 f)(x,y) = 4\sin(x+y) + 4x\cos(x+y)$$
$$(\partial_2 f)(x,y) = 4x\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \binom{1}{1}}(x,y) = f'_{\binom{x}{y},\binom{1}{1}}(0) = 4\sin(x+y) + 8x\cos(x+y)$$

da
$$f_{\binom{x}{y},\binom{1}{1}}(t) = f(x+t, y+t) = 4(x+t)\sin(x+y+2t)$$

Beobachte:
$$\frac{\partial f}{\partial \binom{1}{1}} = \frac{\partial f}{\partial \binom{0}{1}} + \frac{\partial f}{\partial \binom{1}{0}}$$

Das ist kein Unfall:

Def Ist $f : U \to \mathbb{R}^m$ in alle Richtungen stetig differenzierbar und $x \in U$, so definiere die <u>Jacobi-Matrix</u> $D_x f \in \mathrm{Mat}(n,m)$ durch

$$(D_x f)_{ij} = \partial_i f^j, \text{ also}$$

$$D_x f = \begin{pmatrix} \partial_1 f^1{}_x & \cdots & \partial_n f^1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \partial_1 f^m{}_x & \cdots & \partial_n f^m \end{pmatrix}$$

Dann heißt
$$Df : U \longrightarrow \mathrm{Mat}(n,m)$$
das <u>totale Differential</u> von f.

<u>Satz</u> Sei B Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent

- $\frac{\partial f}{\partial b} : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ist stetig für alle $b \in B$.
- f ist in alle Richtungen stetig differenzierbar

In diesem Fall gilt
$$(D_x f) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(x) \qquad \forall x \in U,\ v \in \mathbb{R}^n$$
oder allgemeiner für jede Basis B' von $\mathbb{R}^m$:
$$(D_x f)_{BB'} \cdot v_B = \left(\frac{\partial f}{\partial v}(x)\right)_{B'}$$

<u>Bsp</u> $m=1$, $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$. $x \in U$

$\leadsto D_x f \in \mathrm{Mat}(1,n) \cong \mathbb{R}^n$. Aufgefasst als Spaltenvektor schreibt man für $D_x f$ oft
$$(\nabla f)(x) \quad \text{oder} \quad (\operatorname{grad} f)(x)$$

$\leadsto \nabla f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Die Formel
$$(D_x f) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(x) \quad \text{wird dann}$$
$$\langle \nabla f(x), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial v}(x)$$

Es folgt für $|v|=1$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = |\nabla f(x)| \cos \measuredangle (v, \nabla f(x)).$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ maximal für $v = \nabla f(x) / |\nabla f(x)|$

$\rightsquigarrow$ $\nabla f(x)$ zeigt in die Richtung des größten Anstiegs von f um x. Dieser ist dann $|\nabla f(x)|$.

<u>Def</u> $f: U \to \mathbb{R}$ hat bei x ein lokales Maximum / Minimum, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(u) \geq f(x)$ $\forall$ $u \in U_\varepsilon(x)$.

<u>Cor</u> Hat f bei x ein lokales Extremum $\Rightarrow$ $\nabla f(x) = 0$.

Um zu entscheiden ob es sich bei einer solchen Nullstelle des Gradienten um ein Extremum handelt, sieht man mittels:

<u>Def</u> Ist $\nabla f: U \to \mathbb{R}^n$ in alle Richtungen differenzierbar, so setze $H_x f = D_x \nabla f$.

$$Hf: U \to \mathrm{Mat}(n,n)$$

"Hesse - Matrix".

$Hf(x)$ ist also die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen:

$$H_x f = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(x) & \cdots & \partial_n\partial_1 f(x) \\ & & \vdots \\ \partial_1\partial_n f(x) & \cdots & \partial_n\partial_n f(x) \end{pmatrix}$$

<u>Satz</u> (Schwarz) Ist ∇f in alle Richtungen stetig diff'bar so ist $H_x f$ symmetrisch.

Ziel dieses Abschnitts ist nun folgendes

<u>Theorem</u>: Ist $f: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, zweimal stetig in alle Richtungen diff'bar und $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(x) = 0$. Dann gilt

i) sind alle Eigenwerte von $H_x f$ positiv so hat f bei x ein lokales Minimum

ii) ______________________ negativ
______________________ Maximum

iii) hat $H_x f$ sowohl positive als auch negative Eigenwerte so ist x ein <u>Sattelpunkt</u> von f.