UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

L'equazione di Yamabe: analisi e soluzioni attraverso il Metodo delle Sfere Mobili e il Principio del Massimo

Candidato:

Marco Fraccaroli

Matricola:

1029505

Relatore:

Roberto Monti

26 settembre 2014

Indice

Introduzione

L'equazione che studieremo in questa tesi è la cosiddetta *equazione di Yamabe*. Si tratta di una equazione differenziale alle derivate parziali definita in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, per funzioni non negative $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$ che ha la seguente forma:

$$\Delta u = -n(n-2)u^{\frac{n+2}{n-2}}. \tag{1}$$

Questa equazione sorge nel contesto della Geometria Differenziale in relazione al problema di Yamabe e ha anche un significato legato all'Analisi Funzionale e alla disuguaglianza di Sobolev L^2 in $\mathbb{R}^n$. Questi collegamenti verranno studiati nel Capitolo 1 con riferimento ai testi [**SY**] per il significato geometrico e [**LL**] per quello funzionale.
L'equazione in sé e la classificazione delle sue soluzioni hanno un interesse intrinseco, che sarà quello su cui ci concentreremo in queste pagine. L'obiettivo è provare il seguente:

Teorema. (SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DI YAMABE)
Sia $n \geq 3$. Le soluzioni positive $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$ dell'equazione

$$\Delta u = -n\,(n-2)\,u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

sono tutte e sole le funzioni

$$u_{\lambda,x_0}(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + |x-x_0|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

con $\lambda > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

La dimostrazione di questo risultato ci permetterà di introdurre una serie di strumenti fondamentali e di vedere all'opera alcune efficaci tecniche di studio delle equazioni differenziali, semplici nel livello di Matematica adoperata ma anche profonde nella loro capacità di cogliere la questione centrale del problema.

Nel Capitolo 2 ci concentreremo sullo studio a priori delle proprietà di simmetria delle soluzioni e sulle trasformazioni che permettono di ottenere soluzioni a partire da altre soluzioni; cercheremo anche di interpretare il significato "geometrico" dei passaggi di volta in volta eseguiti, traendone informazioni per la risoluzione. Parallelamente verificheremo come l'insieme delle funzioni $u_{\lambda,x_0}(x)$ sia chiuso rispetto alle trasformazioni proposte. Infine risolveremo l'equazione sotto l'ipotesi di simmetria sferica. Questi passaggi serviranno a metterci nell'ottica di usare la simmetria rispetto all'inversione sferica delle soluzioni per determinarle. Vedremo come una comprensione geometrica dell'equazione possa semplificare la sua risoluzione.

Il Capitolo 3 verterà sulla dimostrazione del risultato centrale nel metodo di risoluzione di Li e Zhang in [**LZ**]. In principio introdurremo alcuni strumenti della Teoria delle Equazioni Differenziali, in particolare il Principio del Massimo (Debole e Forte) e il Lemma di Hopf per operatori differenziali del secondo ordine ellittici. Quindi, dopo aver tradotto questi teoremi dalla loro forma generale in una più adatta al nostro caso specifico, li sfrutteremo insieme al Metodo delle Sfere Mobili per provare che le soluzioni sono simmetriche rispetto all'inversione sferica.

Saremo dunque pronti ad affrontare il percorso di Li e Zhang per arrivare alla classificazione delle soluzioni, cosa che faremo nel Capitolo 4 dopo aver osservato le buone proprietà di integrabilità delle soluzioni. Questo metodo fa tesoro delle esperienze e dei tentativi precedenti di soluzioni di Gidas, Ni e Nirenberg in [**GNN**] e Caffarelli, Gidas e Spruck in [**CGS**] per sviluppare una strategia più brillante ed efficace.

Capitolo 1

Origine dell'equazione di Yamabe

1.1 Legame con la disuguaglianza di Sobolev

L'equazione di Yamabe è l'equazione di Eulero-Lagrange associata alla disuguaglianza di Sobolev L^2 in $\mathbb{R}^n$:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{2n}{n-2}}\, dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \le C_n \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx, \qquad C_n = \frac{4}{n(n-2)}\left(\frac{1}{\omega_n}\right)^{\frac{2}{n}}, \tag{1.1}$$

valida per funzioni $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n)$ tali che $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^n)$. A meno di un fattore moltiplicativo, le funzioni che realizzano l'uguaglianza in (1.1) sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione di Yamabe (1). Definiamo

$$J(u) := \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{2n}{n-2}}\, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}} \ge \frac{1}{C_n} > 0. \tag{1.2}$$

Vogliamo ricavare una condizione sulle funzioni estremanti di $J(\cdot)$. Per prima cosa osserviamo che tale funzionale non ammette massimo; basta notare che si può "ingrandire" fortemente il numeratore senza sostanzialmente variare il denominatore. Questo si ottiene "frastagliando" una qualsiasi funzione nel dominio di definizione di $J(\cdot)$. In effetti le funzioni estremanti sono tutti e soli i minimizzanti. Se una funzione $u > 0$ con regolarità opportuna è un minimo allora

$$J(u) \le J(v) \qquad \text{per ogni } v \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n) \text{ tale che } |\nabla v| \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Vogliamo dimostrare che questa condizione è equivalente a richiedere che la funzione u risolva l'equazione

$$\Delta u = -n(n-2)\, u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

a meno di costanti moltiplicative.

Sia $v \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ una funzione arbitraria (notiamo allora che vale $v \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n)$ e $|\nabla v| \in L^2(\mathbb{R}^n)$). Per $\varepsilon \ge 0$ definiamo

$$g(\varepsilon) := J(u + \varepsilon v).$$

Se per $\varepsilon = 0$ si ha un minimo per $g(\cdot)$ per ogni v come sopra allora

$$\frac{d}{d\varepsilon} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u + \varepsilon \nabla v|^2 \, dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u + \varepsilon v|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx \right)^{\frac{n-2}{n}}} \Bigg|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Procedendo con passaggi formali troviamo

$$\frac{\left[\int_{\mathbb{R}^n} 2 (\nabla u + \varepsilon \nabla v) \cdot (\nabla v) \, dx\right] \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u + \varepsilon v|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u + \varepsilon v|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{2\frac{n-2}{n}}} -$$
$$- \frac{\left[\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u + \varepsilon \nabla v|^2 \, dx\right] \frac{n-2}{n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u + \varepsilon v|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{-\frac{2}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{2n}{n-2} |u + \varepsilon v|^{\frac{n+2}{n-2}} v \, dx\right)}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u + \varepsilon v|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{2\frac{n-2}{n}}} \Bigg|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Possiamo ora ignorare il denominatore dal momento che stiamo considerando le u non negative (e non banali, quindi $u \not\equiv 0$) e di conseguenza per $\varepsilon \to 0$ questo risulta $\neq 0$.
Semplificando fattori moltiplicativi diversi da 0 otteniamo

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla v \, dx\right] \left(\int_{\mathbb{R}^n} u^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right) - \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx\right] \left(\int_{\mathbb{R}^n} u^{\frac{n+2}{n-2}} v \, dx\right) = 0. \tag{1.3}$$

Osserviamo che

$$\int_{\partial B_R^n} ((\nabla u)\, v) \cdot \nu_e \, d\sigma \xrightarrow{R \to +\infty} 0$$

perché $v \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, quindi $v(x) \equiv 0$ per $|x| > \tilde{R}$, per ogni $\tilde{R} > 0$ grande.
Ma per il Teorema della Divergenza risulta

$$\int_{\partial B_R^n} ((\nabla u)\, v) \cdot \nu_e \, d\sigma = \int_{B_R^n} \nabla \cdot ((\nabla u)\, v) \, dx = \int_{B_R^n} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{B_R^n} (\Delta u)\, v \, dx.$$

Passando al limite per $R \to +\infty$ si ha allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = -\int_{B_R^n} (\Delta u)\, v \, dx.$$

Sostituendo in (1.3) si ottiene

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)\, v \, dx\right] \left(\int_{\mathbb{R}^n} u^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right) + \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx\right] \left(\int_{\mathbb{R}^n} u^{\frac{n+2}{n-2}} v \, dx\right) = 0,$$

da cui ricaviamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} v \left(\left[(\Delta u) \left(\int_{\mathbb{R}^n} u^{\frac{2n}{n-2}} \, dx \right) \right] + \left[u^{\frac{n+2}{n-2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx \right) \right] \right) dy = 0 \qquad \text{per ogni} v \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Ora nel dominio delle funzioni in esame risulta che l'insieme $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso, cioè $\overline{\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)} = L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n) \cap L^2_\nabla(\mathbb{R}^n)$. Ma allora

$$\Delta u \left(\int_{\mathbb{R}^n} u^{\frac{2n}{n-2}} \, dx \right) + u^{\frac{n+2}{n-2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx \right) \in \left(\overline{\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)} \right)^\perp \Leftrightarrow \Delta u \left(\int_{\mathbb{R}^n} u^{\frac{2n}{n-2}} \, dx \right) + u^{\frac{n+2}{n-2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx \right) = 0,$$

dove il prodotto scalare è quello classico hermitiano ristretto al caso di funzioni a valori reali. Ovvero l'equazione (1.3) valida per ogni v è equivalente a

$$\Delta u = -\frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} u^{\frac{2n}{n-2}} \, dx} u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

che è proprio (a meno di un fattore moltiplicativo) l'equazione di Yamabe.

1.2 Legame con il problema di Yamabe

Il termine equazione di Yamabe deriva dal *problema di Yamabe*.
Sia (M, g) una varietà di Riemann compatta $\mathscr{C}^\infty$ di dimensione $n \geq 3$. Ad essa si associa un tensore di Riemann, dunque un tensore di Ricci e infine una curvatura scalare R. Ora ci si chiede se esista una metrica $\tilde{g}$ conforme con g tale che la curvatura scalare $\tilde{R}$ associata a questa nuova metrica sia costante. Sia $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ la nuova metrica conforme, dove $u \in \mathscr{C}^\infty(M)$ è una funzione positiva. La curvatura scalare $\tilde{R}$ di $(M, \tilde{g})$ è legata a R e a u tramite l'equazione (si veda [**SY**] [5]):

$$\Delta u = \gamma_n \left(Ru - \tilde{R} u^{\frac{n+2}{n-2}} \right), \qquad \gamma_n = \frac{n-2}{4(n-1)}, \tag{1.4}$$

dove Δ è l'operatore di Laplace-Beltrami su M (ovvero estende il concetto di Laplaciano sulla varietà di Riemann). Ci si chiede se l'equazione (1.4) abbia soluzioni u per qualsiasi $\tilde{R}$. Il problema di Yamabe sorge nell'ambito della congettura di Poincarè e ha risposta affermativa (la prova completa è dovuta a Schoen).

Consideriamo ora $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, dotato della metrica standard che chiameremo g. La curvatura scalare della varietà di Riemann $(\mathbb{R}^n, g)$ è $R = 0$. Sia ora $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ una nuova metrica su $\mathbb{R}^n$ conforme con g, dove $u > 0$ è una funzione $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$. Ancora otteniamo che la curvatura scalare $\tilde{R}$ di $(\mathbb{R}^n, \tilde{g})$ è legata a R e a u tramite l'equazione (si veda [**SY**] [5]):

$$\Delta u = -\gamma_n \tilde{R} u^{\frac{n+2}{n-2}}, \qquad \gamma_n = \frac{n-2}{4(n-1)}.$$

Pertanto u risolve l'equazione di Yamabe (1) se e solo se $(\mathbb{R}^n, \tilde{g})$ ha curvatura scalare costante $\tilde{R} = 4n(n-1)$. Di conseguenza le soluzioni dell'equazione non solo producono le funzioni estremali per la disuguaglianza di Sobolev, ma individuano anche i cambiamenti conformi della metrica standard su $\mathbb{R}^n$ tali che la nuova varietà di Riemann abbia curvatura scalare costante.

Capitolo 2

Proprietà delle soluzioni e soluzioni radiali

Studieremo ora alcune proprietà della famiglia di funzioni $u_{\lambda,x_0}(x)$ con $\lambda > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Analizzeremo poi alcune trasformazioni che a partire da soluzioni forniscono ulteriori soluzioni (verificando che l'insieme delle funzioni $u_{\lambda,x_0(x)}$ sia chiuso per tali trasformazioni); cercheremo di interpretarne anche il significato geometrico. Risolveremo infine l'equazione facendo delle ulteriori assunzioni sulla natura dell'equazione (simmetria sferica rispetto l'origine) riconducendola a un'equazione differenziale per funzioni definite su $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

2.1 Proprietà delle funzioni $u_{\lambda,x_0}(x)$

2.1.1 Le funzioni $u_{\lambda,x_0}(x)$ sono soluzioni dell'equazione di Yamabe (1)

Infatti dati $\lambda > 0,\ x_0 \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$u_{\lambda,x_0}(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + |x - x_0|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

Da cui

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u_{\lambda,x_0}(x) = -(n-2)\left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + |x - x_0|^2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{x_i - x_{0\ i}}{\lambda},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x_i} u_{\lambda,x_0}(x) = -(n-2)\left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + |x - x_0|^2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\lambda}\left[-n\,(x_i - x_{0\ i})^2 \frac{1}{\lambda^2 + |x - x_0|^2} + 1\right],$$

$$\begin{aligned}\Delta u_{\lambda,x_0}(x) &= -n\,(n-2)\left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + |x - x_0|^2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\lambda}\left[1 - \frac{|x - x_0|^2}{\lambda^2 + |x - x_0|^2}\right] = -n\,(n-2)\left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + |x - x_0|^2}\right)^{\frac{n+2}{2}} = \\ &= -n\,(n-2)\,u_{\lambda,x_0}(x)^{\frac{n+2}{n-2}}.\end{aligned}$$

Quindi (1) è soddisfatta.

2.1.2 Le funzioni $u_{\lambda,x_0}(x)$ realizzano l'uguaglianza nella disuguaglianza di Sobolev L^2 in $\mathbb{R}^n$ (1.1)

Verifichiamo ora che le funzioni del tipo $u_{\lambda,x_0}(x)$ realizzano l'uguaglianza nella disuguaglianza di Sobolev (1.1), dunque sono minimizzanti. In particolare risulta che siano in $L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n)$ e con gradiente in $L^2(\mathbb{R}^n)$, cosa che si poteva sapere a priori dal momento che sono soluzioni dell'equazione di Yamabe come illustreremo nel paragrafo [4.1]. Infatti

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u_{\lambda,x_0}(x)|^{\frac{2n}{n-2}}\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\lambda}{\lambda^2+|x-x_0|^2}\right)^n dx = \\
z=\frac{x-x_0}{\lambda} \to &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\left(1+|z|^2\right)^n}\, dz = \qquad \text{quindi come integrale è indipendente da } \lambda \text{ e } x_0 \\
&= \int\int_{\substack{r\in(0,+\infty)\\ \theta\in\mathbb{S}^{n-1}}} \frac{1}{\left(1+r^2\right)^n} r^{n-1}\, dr\, d\theta = \\
&= \int_{r=0}^{+\infty} \frac{r^{n-1}}{\left(1+r^2\right)^n}\, dr\, \omega_{n-1} = \qquad \text{con } \omega_{n-1} \text{ area della sfera } \mathbb{S}^{n-1} \\
R=r^2 \to &= \frac{1}{2}\omega_{n-1}\int_{R=0}^{+\infty} \frac{R^{\frac{n-2}{2}}}{(1+R)^n}\, dR = \\
&= \frac{1}{2}\omega_{n-1} B\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right) = \qquad \text{con } B(\cdot,\cdot) \text{ funzione Beta di Eulero} \\
&= \frac{1}{2}2\frac{\left(\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} B\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right) = \qquad \text{con } \Gamma(\cdot) \text{ funzione Gamma di Eulero} \\
&= \frac{\left(\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)} = \left(\sqrt{\pi}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)} = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)} = \frac{\omega_n}{2^n}.
\end{aligned}$$

Si verifica poi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2\, dx &= (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\lambda}{\lambda^2+|x-x_0|^2}\right)^n \frac{|x-x_0|^2}{\lambda^2}\, dx = \\
z=\frac{x-x_0}{\lambda} \to &= (n-2)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|z|^2}{\left(1+|z|^2\right)^n}\, dz = \qquad \text{quindi come integrale è indipendente da } \lambda \text{ e } x_0 \\
&= (n-2)^2 \int_{r=0}^{+\infty} \frac{r^{n+1}}{\left(1+r^2\right)^n}\, dr\, \omega_{n-1} = \\
R=r^2 \to &= \frac{(n-2)^2}{2}\omega_{n-1}\int_{R=0}^{+\infty} \frac{R^{\frac{n}{2}}}{(1+R)^n}\, dR = \\
&= \frac{(n-2)^2}{2}\omega_{n-1} B\left(\frac{n+2}{2},\frac{n-2}{2}\right) = \frac{(n-2)^2}{2} 2\frac{\left(\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} B\left(\frac{n+2}{2},\frac{n-2}{2}\right) = \\
&= (n-2)^2 \frac{\left(\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma(n)} = (n-2)^2 \frac{\left(\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\frac{2}{n-2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)} = \\
&= n(n-2)\frac{\omega_n}{2^n}.
\end{aligned}$$

Pertanto si ha il risultato voluto

$$\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_{\lambda,x_0}(x)|^{\frac{2n}{n-2}}\, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}}{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{\lambda,x_0}(x)|^2\, dx} = \left(\frac{\omega_n}{2^n}\right)^{\frac{n-2}{n}} \frac{1}{n(n-2)}\frac{2^n}{\omega_n} = \left(\frac{\omega_n}{2^n}\right)^{\frac{-2}{n}} \frac{1}{n(n-2)} = \frac{4}{n(n-2)}\left(\frac{1}{\omega_n}\right)^{\frac{2}{n}} = C_n$$

2.2 Trasformazioni dell'insieme delle soluzioni

Analizzeremo ora una serie di trasformazioni che permettono, a partire da una soluzione positiva $u(x) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$ dell'equazione (1), di ottenere altre soluzioni.

(1) TRASLAZIONI
Sia $u(x) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$ soluzione dell'equazione (1), $b \in \mathbb{R}^n$. Allora la funzione $v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ così definita $v(x) := u(x+b)$ è soluzione.
Questo significa che per l'equazione non ci sono "punti privilegiati".

(2) TRASFORMAZIONI ORTOGONALI
Sia $u(x) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$ soluzione dell'equazione (1), $T \in O_n$ (cioè $TT^T = T^T T = \mathbb{I}_n$). Allora la funzione $v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ così definita $v(x) := u(Tx)$ è soluzione.
Questo significa che per l'equazione non ci sono "direzioni privilegiate" o "orientazioni privilegiate".

(3) RISCALAMENTI
Sia $u(x) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$ soluzione dell'equazione (1), $\lambda > \mathbb{R}$. Allora la funzione $v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ così definita $v(x) = \delta_\lambda u(x) := \lambda^{\frac{n-2}{2}} u(\lambda x)$ è soluzione.
Questo significa che, correggendo opportunamente con un fattore moltiplicativo, per l'equazione non ci sono "scale privilegiate".

(4) INVERSIONE SFERICA RISPETTO ALLA SFERA UNITARIA $\mathbb{S}^{n-1}$
Sia $u(x) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$ soluzione dell'equazione (1). Allora la funzione $v: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ così definita $v(x) = u^*(x) := |x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$ è soluzione.
Infatti vale:

Proposizione 2.2.1. *Si ha:*

(I) $\Delta u^*(x) = |x|^{-2-n} \Delta u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$;

(II) se la funzione $u(x) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$ *risolve l'equazione (1) allora la funzione* $u^*(x)$ *risolve l'equazione (1) su* $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione.

Si introducano le coordinate sferiche (r,θ) con $r > 0$ e $\theta \in \mathbb{S}^n$. Siano

$$f(r,\theta) = u(r\theta), \qquad g(r,\theta) = u^*(r\theta) = r^{2-n} f\left(\frac{1}{r},\theta\right).$$

Ora l'operatore di Laplace in coordinate sferiche è

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

dove $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ è l'operatore di Laplace sulla sfera $\mathbb{S}^{n-1}$.
Per semplificare i successivi calcoli sia $g = g(r,\theta)$ e $h = h(r,\theta) := f\left(\frac{1}{r},\theta\right)$. Si ha:

$$\partial_r g = (2-n)\, r^{1-n} h - r^{-n}\partial_r h,$$

$$\partial_r^2 g = (2-n)(1-n)\, r^{-n} h + 2(n-1)\, r^{-n-1}\partial_r h + r^{-n-2}\partial_r^2 h,$$

$$\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} g = r^{2-n}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} h.$$

da cui

$$\begin{aligned}
\Delta u^*(x) &= \partial_r^2 g(r,\theta) + \frac{n-1}{r}\partial_r g(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} g(r,\theta) = \\
&= (n-1)\, r^{-n-1}\partial_r h(r,\theta) + r^{-n-2}\partial_r^2 h(r,\theta) + r^{-n}\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} h(r,\theta) = \\
&= r^{-n-2}\left(\partial_r^2 h(r,\theta) + (n-1)\, r\partial_r h(r,\theta) + r^2\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} h(r,\theta)\right) = \\
&\text{dal momento che } r = \frac{1}{r} \text{ e } h(r,\theta) = f\left(\frac{1}{r},\theta\right) = u\left(\frac{1}{r}\theta\right) \\
&= r^{-n-2}\Delta u\left(\frac{1}{r}\theta\right) = |x|^{-n-2}\Delta u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) = \qquad \leftarrow \text{questo prova (I)} \\
&= -|x|^{-n-2} n(n-2)\, u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)^{\frac{n+2}{n-2}} = -n(n-2)\left(|x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)\right)^{\frac{n+2}{n-2}} = \\
&= -n(n-2)\, u^*(x)^{\frac{n+2}{n-2}}
\end{aligned}$$

Quindi anche (II) risulta provato. □

Questo significa che, correggendo opportunamente con un fattore moltiplicativo dipendente da x (si noti che idealmente $u^*(x) = \delta_{|x|^{-2}} u(x)$), per l'equazione l'interno della sfera non è "privilegiato" rispetto l'esterno (né viceversa).

(5) Inversione sferica rispetto alla sfera di raggio λ
Sia $u(x) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$ soluzione dell'equazione (1), $\lambda > \mathbb{R}$. Allora la funzione $v:\ \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ così definita $v(x) = u_\lambda(x) := \left(\frac{\lambda}{|x|}\right)^{n-2} u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right)$ è soluzione.
Infatti questa si ottiene come $u_\lambda(x) = \delta_{\frac{1}{\lambda^2}} u^*(x)$ ovvero attraverso due trasformazioni (l'ordine è indifferente) che si è visto conservare la proprietà di "essere soluzione". Tuttavia è utile introdurla visto che verrà ampiamente usata in seguito.
Si osserva che la funzione $u_\lambda(x)$ è data dell'inversione sferica di $u(x)$ rispetto alla sfera di raggio λ. In particolare per ogni x tale che $|x| = \lambda$ si ha $u(x) = u_\lambda(x)$.

Ora possiamo fare due osservazioni:

Oss. 1. La famiglia di funzioni u_{λ,x_0} risulta chiusa rispetto a queste trasformazioni. Infatti

(1) Traslazioni
Sia $b \in \mathbb{R}^n$. Allora $u_{\lambda,x_0}(x+b) = u_{\lambda,x_0-b}(x)$.

(2) TRASFORMAZIONI ORTOGONALI

Sia $T \in O_n$. Allora $u_{\lambda,x_0}(Tx) = u_{\lambda,T^{-1}x_0}(x) = u_{\lambda,T^T x_0}(x)$.

(3) RISCALAMENTI

Sia $\mu > \mathbb{R}$. Allora $\delta_\mu u_{\lambda,x_0}(x) = u_{\frac{\lambda}{\mu},\frac{x_0}{\mu}}(x)$.

(4) INVERSIONE SFERICA RISPETTO ALLA SFERA UNITARIA $\mathbb{S}^{n-1}$

Vogliamo determinare $\mu > 0$ e $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tali che $u^*_{\lambda,x_0}(x) = u_{\mu,y_0}(x)$ per $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ovvero

$$u_{\mu,y_0}(x) = \left(\frac{\mu}{\mu^2 + |x - y_0|}\right)^{\frac{n-2}{2}} = u^*_{\lambda,x_0}(x) =$$
$$= |x|^{2-n}\left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + \left|\frac{x}{|x|^2} - x_0\right|}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \left(\frac{\lambda|x|^{-2}}{\lambda^2 + \left|\frac{x}{|x|^2} - x_0\right|}\right)^{\frac{n-2}{2}} =$$
$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda^2|x|^2 + \left|\frac{x}{|x|} - |x|x_0\right|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

Da cui risulta la condizione equivalente

$$\lambda|x - y_0|^2 + \mu^2\lambda = \mu\lambda^2|x|^2 + \mu\left|\frac{x}{|x|} - |x|x_0\right|^2. \tag{2.1}$$

Si osserva che deve valere per $x = \pm e_i$ per ogni $i \in \{1,\dots,n\}$ ovvero

$$\lambda|e_i - y_0|^2 + \mu^2\lambda = \mu\lambda^2 + \mu|e_i - x_0|^2, \qquad \lambda|-e_i - y_0|^2 + \mu^2\lambda = \mu\lambda^2 + \mu|-e_i - x_0|^2.$$

Sottraendo il secondo al primo risulta

$$\lambda y_{0i} = \mu x_{0i} \qquad \forall i \in \mathbb{R}^n, \qquad y_0 = \frac{\mu}{\lambda}x_0.$$

In particolare $\mu = \lambda\frac{|y_0|}{|x_0|}$, quindi sostituendo in (2.1) si ottiene

$$\lambda|x - y_0|^2 + \lambda^3\frac{|y_0|^2}{|x_0|^2} = \lambda^3\frac{|y_0|}{|x_0|}|x|^2 + \lambda\frac{|y_0|}{|x_0|}\left|\frac{x}{|x|} - |x|x_0\right|^2.$$

Semplificando e sviluppando si ha

$$|x|^2 + |y_0|^2 - 2x\cdot y_0 + \lambda^2\frac{|y_0|^2}{|x_0|^2} = \lambda^2\frac{|y_0|}{|x_0|}|x|^2 + \lambda\frac{|y_0|}{|x_0|}\left(1 + |x|^2|x_0|^2 - 2x\cdot x_0\right).$$

Il termine noto deve essere lo stesso quindi

$$|y_0|^2 + \lambda^2\frac{|y_0|^2}{|x_0|^2} = \frac{|y_0|}{|x_0|}, \qquad |y_0| = \frac{|x_0|}{|x_0|^2 + \lambda^2}.$$

Quindi risulta

$$\mu = \frac{\lambda}{|x_0|^2 + \lambda^2}, \qquad y_0 = \frac{1}{|x_0|^2 + \lambda^2}x_0$$

(5) INVERSIONE SFERICA RISPETTO ALLA SFERA DI RAGGIO μ

Sia $\mu > \mathbb{R}$. Allora $\left(u_{\lambda,x_0}\right)_\mu(x) = u_{\nu,z_0}(x)$ con

$$\nu = \mu^2 \frac{\lambda}{|x_0|^2 + \lambda^2}, \qquad z_0 = \mu^2 \frac{1}{|x_0|^2 + \lambda^2} x_0$$

Oss. 2. L'equazione (1) risulta invariante rispetto alle traslazioni, trasformazioni ortogonali, riscalamenti e inversioni sferiche. Queste, per il Teorema di Liouville, formano il gruppo delle *trasformazioni conformi* di $\mathbb{R}^n$ per $n \geq 3$. D'altra parte questo era prevedibile considerato il significato geometrico dell'equazione.

2.3 Soluzioni sotto l'ipotesi di simmetria sferica

Aggiungiamo ora la condizione di simmetria sferica rispetto l'origine per le soluzioni. Analizzeremo come cambia l'equazione in coordinate polari e risolveremo il problema.
Dunque si ha $u(x) = \varphi(|x|) = \varphi(r)$ con $r > 0$ e

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(r) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = \varphi'(r)\frac{x_i}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi'(r)\frac{x_i}{r}\right) = \frac{\partial \varphi'}{\partial x_i}(r)\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{x_i}{r} + \varphi'(r)\frac{r - \frac{x_i}{r}}{r^2} =$$

$$= \varphi''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + \varphi'(r)\frac{r^2 - x_i^2}{r^3},$$

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{i=1}^n \left(\varphi''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + \varphi'(r)\frac{r^2 - x_i^2}{r^3}\right) = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r).$$

Quindi l'equazione di Yamabe (1) diventa

$$\varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) = -n(n-2)\varphi(r)^{\frac{n+2}{n-2}}, \qquad \text{con } r > 0. \tag{2.2}$$

Sia $\phi(r) \in \mathscr{C}^2(0,+\infty)$ con $\phi \geq 0$ soluzione di quest'ultima equazione.
Sia poi $\psi(t) \in \mathscr{C}^2(0,+\infty)$ la funzione tale che $\phi(r) = r^{\frac{2-n}{2}}\psi\left(-\log r\right)$ (questa operazione si chiama *sostituzione di Emden-Fowler*).

(I) *Esiste una costante* $C \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$\psi'(t)^2 = (n-2)^2\left(\frac{1}{4}\psi(t)^2 - \psi(t)\right)^{\frac{2n}{n-2}} + C, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Si ha

$$\phi\left(e^{-t}\right) = e^{-t\frac{2-n}{2}}\psi(t), \qquad \psi(t) = e^{t\frac{2-n}{2}}\phi\left(e^{-t}\right).$$

Da cui

$$\psi'(t) = e^{t\frac{2-n}{2}}\frac{2-n}{2}\phi\left(e^{-t}\right) - e^{-t\frac{n}{2}}\phi'\left(e^{-t}\right),$$

$$\psi''(t) = \left(\frac{2-n}{2}\right)^2 e^{t\frac{2-n}{2}}\phi\left(e^{-t}\right) - e^{-t\frac{n}{2}}\frac{2-n}{2}\phi'\left(e^{-t}\right) + \frac{n}{2}e^{-t\frac{n}{2}}\phi'\left(e^{-t}\right) + e^{-t\frac{n+2}{2}}\phi''\left(e^{-t}\right).$$

Deriviamo l'equazione (2.3)

$$2\psi'(t)\psi''(t) = (n-2)^2\left(\frac{1}{2}\psi(t)\psi'(t) - \frac{2n}{n-2}\psi(t)^{\frac{n+2}{n-2}}\psi'(t)\right).$$

Se $\psi'(t) \equiv 0$ allora $\psi(t)$ è costante quindi si può determinare C. Altrimenti si può semplificare e ottenere

$$2\psi''(t) = (n-2)^2\left(\frac{1}{2}\psi(t) - \frac{2n}{n-2}\psi(t)^{\frac{n+2}{n-2}}\right).$$

Sostituendo $\psi''(t)$ si ottiene

$$\frac{(n-2)^2}{2}\psi(t) + (2n-2)e^{-t\frac{n}{2}}\phi'\left(e^{-t}\right) + 2e^{-t\frac{n+2}{2}}\phi''\left(e^{-t}\right) = \frac{(n-2)^2}{2}\psi(t) - 2n(n-2)\psi(t)^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Sostituendo $\psi(t)$ e ricordando che (2.2) vale per ϕ si ottiene

$$(2n-2)e^{-t\frac{n}{2}}\phi'\left(e^{-t}\right) + 2e^{-t\frac{n+2}{2}}\phi''\left(e^{-t}\right) = 2e^{-t\frac{n+2}{2}}\left(\phi''\left(e^{-t}\right) + \frac{n-1}{e^{-t}}\phi'\left(e^{-t}\right)\right),$$

dove tutto si cancella. Quindi esiste la costante $C \in \mathbb{R}$.

(II) *Assumendo il fatto che $\phi(r)$ sia limitata vicino a $r = 0$ ne consegue che debba essere $C = 0$.*

Infatti sotto questa ipotesi esiste $D \geq 0$ tale che $\phi(r) \leq D$ per $r \to 0$. Quindi

$$e^{-t\frac{2-n}{2}}\psi(t) \leq D \qquad \text{per } t \to +\infty.$$

Da cui

$$\psi(t) \leq De^{t\frac{2-n}{2}} \to 0 \qquad \text{per } t \to +\infty.$$

Quindi $\psi'(t) \to 0$ per $t \to +\infty$ (altrimenti non esiste il $\lim_{t\to+\infty}\psi(t)$. Questa è una contraddizione). Di conseguenza valutando (2.3) per $t \to +\infty$ si ottiene $C = 0$.

(III) *Sia ora $\phi(r) \in \mathscr{C}^2[0,+\infty)$ con $\phi \geq 0$ soluzione dell'equazione (2.2). Sia poi $\theta(r) \in \mathscr{C}^2(0,+\infty)$ la funzione tale che $\phi(r) = (r\,\theta(r))^{\frac{2-n}{2}}$. Allora $\theta(r)$ risolve l'equazione di Eulero*

$$r^2\theta''(r) + r\,\theta'(r) - \theta(r) = 0 \tag{2.4}$$

e $\phi(r)$ risulta determinata.

Si ha che

$$(r\,\theta(r))^{\frac{2-n}{2}} = \phi(r) = r^{\frac{2-n}{2}}\psi(-\log r)$$

Da cui $\theta\left(e^{-t}\right)^{\frac{2-n}{2}} = \psi(t)$. Sostituendo in (2.3) (osservando che dal momento che $\phi(r)$ è continua in $r = 0$ allora è limitata in un intorno e quindi per il punto (II) risulta $C = 0$)

$$\left(-\frac{2-n}{2}\theta\left(e^{-t}\right)^{-\frac{n}{2}}\theta'\left(e^{-t}\right)e^{-t}\right)^2 = (n-2)^2\left(\frac{1}{4}\theta\left(e^{-t}\right)^{2-n} - \theta\left(e^{-t}\right)^{-n}\right),$$

$$\theta\left(e^{-t}\right)^{-n}\theta'\left(e^{-t}\right)^{2}e^{-2t}=\theta\left(e^{-t}\right)^{2-n}-4\theta\left(e^{-t}\right)^{-n}.$$

Semplificando (se $\theta(r)\equiv 0$ allora $\phi(r)$ risulta non continua in $r=0$. Questa è una contraddizione) si ottiene

$$\theta'(r)^2 r^2=\theta(r)^2-4.$$

Derivando e semplificando (se $\theta'(r)\equiv 0$ allora $\theta(r)$ risulta determinata come costante diversa da 0, per cui $\phi(r)$ risulta non continua in $r=0$. Contraddizione) si ottiene l'equazione (2.4) voluta

$$r^2\theta''(r)+r\,\theta'(r)=\theta(r).$$

Determiniamo una base dello spazio delle soluzioni cercandole del tipo $\theta(r)=r^{\lambda}$. Sostituendo si ricava

$$r^2\lambda(\lambda-1)\,r^{\lambda-2}+r\lambda r^{\lambda-1}-r^{\lambda}=0.$$

Quindi $\lambda=\pm1$ e $\theta_1(r)=\frac{1}{r}$, $\theta_2(r)=r$ sono una base. La generica soluzione sarà nella forma

$$\theta(r)=a\frac{1}{r}+br=\frac{a+br^2}{r}.$$

Pertanto

$$\tilde{\phi}(r)=(r\,\theta(r))^{\frac{2-n}{2}}=\left(a+br^2\right)^{\frac{2-n}{2}}=\left(\frac{1}{a+br^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

Osserviamo infine che i coefficienti a e b non sono indipendenti. Sostituendo $\tilde{\phi}(r)$ in (2.2) e semplificando si ottiene

$$b^2r^2-b(a+br^2)=-1,\qquad\qquad ab=1.$$

Quindi

$$\phi(r)=\left(\frac{1}{a+\frac{1}{a}r^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}=\left(\frac{a}{a^2+r^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

che è proprio una funzione nella forma $u_{a,0}(x)$. Inoltre si osserva che imponendo la condizione di simmetria sferica centrata in un qualsiasi $x_0\in\mathbb{R}^n$ (e la condizione di essere definite continue su tutto $\mathbb{R}^n$, ovvero che $\phi(r)$ nel punto (III) sia continua in $r=0$) si ottengono tutte e sole le funzioni del tipo $u_{\lambda,x_0}(x)$. Quindi le soluzioni $u\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$ non negative dell'equazione di Yamabe che ammettono una simmetria sferica rispetto a una qualche origine sono tutte e sole del tipo voluto.

Ora siano $n\geq 3$ e $\lambda>0$. Vogliamo studiare il problema di Cauchy per funzioni continue non negative

$$\begin{cases}\varphi''(r)+\frac{n-1}{r}\varphi'(r)=-n(n-2)\,\varphi(r)^{\frac{n+2}{n-2}} & \text{con } r>0\\ \varphi(0)=a_1:=\lambda^{\frac{2-n}{2}} & \\ \varphi'(0)=0. & \end{cases}$$

Questo problema ha come unica soluzione

$$\phi(r) = \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + r^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

Infatti

$$\phi(0) = \lambda^{\frac{2-n}{2}},$$
$$\phi'(r) = -(n-2)\left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + r^2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{r}{\lambda},$$
$$\phi'(0) = 0,$$
$$\phi''(r) = n(n-2)\left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + r^2}\right)^{\frac{n+2}{2}} \frac{r^2}{\lambda^2} - (n-2)\left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + r^2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\lambda}.$$

Per provare l'unicità si usa il Principio delle Contrazioni sull'intervallo $[0,\varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$ da fissare. Moltiplicando a destra e sinistra dell'equazione per il fattore r^{n-1} e integrando si ottiene:

$$r^{n-1}\varphi'(r) = -n(n-2)\int_0^r s^{n-1}\varphi(s)^{\frac{n+2}{n-2}}\, ds,$$

da cui si osserva che per una data soluzione $\psi(r)$ del problema di Cauchy si deve avere che la funzione $r^{n-1}\psi'(r)$ sia negativa (non costantemente zero). Pertanto lo è anche $\psi'(r)$ e quindi le soluzioni risultano essere strettamente decrescenti. Integrando ancora otteniamo un'equazione integrale equivalente al problema di Cauchy in esame:

$$\varphi(r) = -n(n-2)\int_0^r \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} \varphi(s)^{\frac{n+2}{n-2}}\, ds\, dt.$$

Ora consideriamo lo spazio di funzioni $X := \{f \in \mathscr{C}([0,\varepsilon]) \mid 0 \le f(r) \le a_1 \text{ per ogni } r \in (0,\varepsilon)\}$, con $\varepsilon > 0$ da fissare in seguito, dotato della norma del sup $\|\cdot\|_\infty$. Abbiamo dunque uno spazio di Banach. Definiamo quindi il funzionale $T: X \to X$ che agisce su una funzione $f(r) \in X$ così:

$$T f(r) := a_1 - n(n-2)\int_0^r \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} f(s)^{\frac{n+2}{n-2}}\, ds\, dt, \qquad \text{con } r \in [0,\varepsilon].$$

Si può scegliere $\varepsilon_1 > 0$ in modo tale che $T f \in X$; l'unica condizione da controllare in maniera non banale è che come funzione essa risulti non negativa. Tuttavia sappiamo che $0 \le f(s) \le a_1$ con $s \in (0,\varepsilon)$ dunque l'integrale si limita facilmente in valore assoluto:

$$\begin{aligned} n(n-2)\int_0^r \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} f(s)^{\frac{n+2}{n-2}}\, ds\, dt &\le n(n-2)\int_0^r \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} a_1^{\frac{n+2}{n-2}}\, ds\, dt = \\ &= (n-2)\, a_1^{\frac{n+2}{n-2}} \frac{1}{2} r^2 \le \frac{n-2}{2} a_1^{\frac{n+2}{n-2}} \varepsilon_1^2, \qquad \text{con } r \in [0,\varepsilon_1]. \end{aligned}$$

Ora basta imporre la condizione che quest'ultima espressione sia $\le a_1$. Controlliamo poi che il funzionale T sia una contrazione. Infatti:

$$\begin{aligned} |T\phi(r) - T\psi(r)| &= \left| n(n-2)\int_0^r \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} \psi(s)^{\frac{n+2}{n-2}} - \phi(s)^{\frac{n+2}{n-2}}\, ds\, dt \right| \le \\ &\le \frac{n-2}{2} \|\psi^{\frac{n+2}{n-2}} - \phi^{\frac{n+2}{n-2}}\|_\infty\, \varepsilon_2^2 \qquad \text{con } r \in [0,\varepsilon_2]. \end{aligned}$$

Quest'ultima espressione si può maggiorare sapendo che $|x^p - y^p| \leq p a_1^{p-1} |x - y|$ per $p > 1$ se $0 \leq x, y \leq a_1$. Quindi con un opportuno $\varepsilon_2 > 0$ si ha una contrazione. Di conseguenza possiamo considerare $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ e applicare il Principio delle Contrazioni. Pertanto abbiamo l'unicità della soluzione dell'equazione integrale (e dunque del problema di Cauchy) in $[0, \varepsilon]$. Per concludere ci basta ora osservare che staccandosi da 0 l'equazione differenziale risulta regolare ordinaria e la soluzione deve essere limitata, dunque essa si estende con unicità su tutto $[0, +\infty)$.

Tutti questi passaggi evidenziano il fatto che l'insieme delle funzioni del tipo $u_{\lambda, x_0}(x)$ possa essere un buon candidato come insieme delle soluzioni dell'equazione di Yamabe.

Capitolo 3

Simmetria rispetto l'inversione sferica delle soluzioni

In questo capitolo dimostreremo il risultato introduttivo per la classificazione delle soluzioni dell'equazione di Yamabe fatta da Li e Zhang e che costituisce una semplificazione rispetto ai precedenti sforzi di [**GNN**] e [**CGS**] perché meglio di questi riesce a cogliere e a descrivere le proprietà di simmetria delle soluzioni.

3.1 Principio del Massimo: versione standard

Dato $n \geq 2$ sia $U \in \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Data una funzione $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ si definisce un operatore differenziale del secondo ordine che agisca su di essa così:

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\, u_{x_i} + c(x)\, u, \tag{3.1}$$

dove $u_{x_i x_j}$ indicano le derivate parziali seconde e u_{x_i} quelle prime; inoltre $a^{ij}(x)$, $b^i(x)$, $c(x)$ sono funzioni continue e senza perdita di generalità assumiamo $a^{ij} = a^{ji}$.
L'operatore L si dice *ellittico* se esiste $\theta > 0$ tale che

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \qquad \text{per ogni } x \in U \text{ e tutti gli } \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2}$$

ovvero la matrice $A(x) = \left(a^{ij}(x)\right)_{i,j \in \{1,\dots,n\}}$ è definita strettamente positiva con più piccolo autovalore $\geq \theta > 0$.

Teorema 3.1.1. (PRINCIPIO DEL MASSIMO DEBOLE)
Sia $U \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, un aperto limitato. Sia data una funzione $u \in \mathscr{C}^2(U) \cap \mathscr{C}(\overline{U})$ e un operatore differenziale del secondo ordine ellittico L tale che $c \equiv 0$ in U. Allora:

(I) se $Lu \leq 0$ in U (in questo caso u viene detta sottosoluzione) allora

$$\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u;$$

(II) se $Lu \geq 0$ in U (in questo caso u viene detta soprasoluzione) allora

$$\min_{\overline{U}} u = \min_{\partial U} u.$$

Dimostrazione.

A. Supponiamo innanzitutto che valga

$$Lu < 0 \qquad \text{in } U. \tag{3.3}$$

Per il Teorema di Weierstrass esiste $x_0 \in \overline{U}$ tale che u abbia massimo in x_0. Proviamo che $x_0 \in \partial U$. Per assurdo sia $x_0 \in U$. Quindi in x_0 dobbiamo avere:

$$\begin{aligned} &[\mathrm{i}]\ Du(x_0) = 0, && \leftarrow \text{differenziale come mappa lineare } \equiv 0 \\ &[\mathrm{ii}]\ D^2u(x_0) \leq 0. && \leftarrow \text{Hessiano come matrice definita negativa} \end{aligned} \tag{3.4}$$

B. La matrice $A = \left(a^{ij}(x_0)\right)_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ è simmetrica e definita positiva. Quindi esiste una matrice ortogonale $O = \left(o^{ij}\right)_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ (ovvero con la proprietà che $O^T O = OO^T = \mathbb{I}_n$) tale che

$$OAO^T = \operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n) \qquad \text{con } d_k > 0 \text{ per } k \in \{1,\dots,n\}. \tag{3.5}$$

Sia $y = x_0 + O(x - x_0)$ da cui $x - x_0 = O^T\left(y - x_0\right)$ e quindi:

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{y_k} o^{ik} \qquad i \in \{1,\dots,n\},$$

$$u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} u_{y_k y_l} o^{ik} o^{jl} \qquad i,j \in \{1,\dots,n\}.$$

Pertanto in x_0 si ha

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} &= \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{y_k y_l} o^{ik} o^{jl} \\ \text{per (3.5)} \rightarrow &= \sum_{k=1}^{n} d_k u_{y_k y_k} \leq 0 \leftarrow \text{siccome } d_k > 0 \text{ e } u_{y_k y_k}(x_0) \leq 0,\ k \in \{1,\dots,n\} \text{ per (3.4)[ii]} \end{aligned} \tag{3.6}$$

C. In x_0 vale allora

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} \geq 0$$

per (3.4[i]) e (3.6). Questa è una contraddizione. Quindi (3.3) e (3.4) sono incompatibili.

D. Nel caso generale $Lu \leq 0$ definiamo

$$u^{\varepsilon}(x) := u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1} \qquad x \in U$$

con $\lambda > 0$ che sceglieremo in seguito ed $\varepsilon > 0$.
Per la condizione di ellitticità risulta $a^{ii}(x) \geq \theta > 0$ (basta scegliere $\xi = e_i$) e quindi

$$\begin{aligned} Lu^{\varepsilon} = Lu + \varepsilon L\left(e^{\lambda x_1}\right) &\leq \varepsilon e^{\lambda x_1}\left[-\lambda^2 a^{11} + \lambda b^1\right] \leq \\ &\leq \varepsilon e^{\lambda x_1}\left[-\lambda^2 \theta + \lambda \|b\|_{\infty}\right] < 0 \qquad \text{in } U, \end{aligned}$$

quest'ultima con la scelta di λ sufficientemente grande. Per il ragionamento fatto precedentemente risulta $\max\limits_{\overline{U}} u^{\varepsilon} = \max\limits_{\partial U} u^{\varepsilon}$. Per $\varepsilon \to 0$ si ha allora $\max\limits_{\overline{U}} u = \max\limits_{\partial U} u$.

E. Il caso del minimo discende dal caso appena dimostrato osservando che $-u$ è sottosoluzione ogni qualvolta che u è soprasoluzione. □

Oss. 3. La dimostrazione del Teorema suggerisce che se u soddisfa le condizioni e non è costante non ci sono punti di massimo (o minimo) interni.

Estendiamo il Teorema (3.1.1) al caso $c \geq 0$. Definiamo $u^+ := \max(u,0)$ e $u^- := -\min(u,0)$

Teorema 3.1.2. (PRINCIPIO DEL MASSIMO DEBOLE CON $c \geq 0$)
Sia $U \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ un aperto limitato. Sia data una funzione $u \in \mathscr{C}^2(U) \cap \mathscr{C}(\overline{U})$ e un operatore differenziale del secondo ordine ellittico L tale che $c \geq 0$ in U. Allora:

(I) se $Lu \leq 0$ in U allora

$$\max_{\overline{U}} u \leq \max_{\partial U} u^+;$$

(II) se $Lu \geq 0$ in U allora

$$\min_{\overline{U}} u \geq -\min_{\partial U} u^-.$$

Dimostrazione.

A. Sia u una sottosoluzione e sia $V := \{x \in U \mid u(x) > 0\}$. Si definisca l'operatore differenziale del secondo ordine

$$Ku := Lu - cu.$$

Si ha

$$Ku \leq -cu \leq 0 \qquad \text{in } V.$$

L'operatore K ha il termine di ordine zero (il "suo" c) $\equiv 0$ e quindi si può applicare il Principio del Massimo Debole (3.1.1)

$$\max_{\overline{V}} u = \max_{\partial V} u = \max_{\partial U} u^+.$$

che fornisce il risultato nel caso $V \neq \emptyset$. Altrimenti $u \leq 0$ su tutto U e la tesi risulta ancora verificata banalmente.

B. Il caso del minimo discende dal caso appena dimostrato osservando che $-u$ è sottosoluzione ogni qualvolta che u è soprasoluzione e $(-u)^+ = u^-$. □

Si dimostrerà ora un risultato importante che permetta di arrivare ad un "rafforzamento" del risultato appena discusso.

Teorema 3.1.3. (LEMMA DI HOPF)

Sia $U \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ un aperto limitato. Sia data una funzione $u \in \mathscr{C}^2(U) \cap \mathscr{C}^1(\overline{U})$ e un operatore differenziale del secondo ordine ellittico L tale che $c \equiv 0$ in U.
Si supponga poi $Lu \leq 0$ in U e che

$$\textit{esista } \tilde{x} \in \partial U \textit{ tale che } u(\tilde{x}) > u(x) \qquad \textit{per ogni } x \in U. \tag{3.7}$$

Si assuma poi che U soddisfi la condizione di palla interna in $\tilde{x}$, cioè

$$\textit{esista } B \subset U \textit{ palla aperta tale che } \tilde{x} \in \partial B.$$

(I) Allora si ha

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\tilde{x}) > 0$$

con ν vettore unitario esterno a B in $\tilde{x}$.

(II) Se $c \geq 0$ in U vale la stessa conclusione assumendo che $u(\tilde{x}) \geq 0$.

Dimostrazione.

A. Sia $c \geq 0$. Si può assumere $B = B^o(0, r)$ con $r > 0$. Definiamo

$$v(x) := e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda r^2} \qquad \text{per } x \in B$$

con λ scelto succesivamente. Usando la condizione di uniforme ellitticità (3.2) si calcola

$$\begin{aligned} Lv &= -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i v_{x_i} + cv = \\ &= e^{-\lambda|x|^2} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\left(-4\lambda^2 x_i x_j + 2\lambda\delta_{ij}\right) - e^{-\lambda|x|^2} \sum_{i=1}^{n} b^i (2\lambda x_i) + c\left(e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda r^2}\right) \leq \\ &\leq e^{-\lambda|x|^2}\left(-4\lambda^2\theta|x|^2 + 2\lambda \operatorname{tr}(A) + 2\lambda|b||x| - c\right) \end{aligned}$$

Infatti si ha

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\left(-4\lambda^2 x_i x_j\right) = -4\lambda^2 \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} x_i x_j \leq -4\lambda^2\theta|x|^2 \qquad \text{per (3.2)},$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} 2\lambda\delta_{ij} = 2\lambda \operatorname{tr}(A),$$

$$-\sum_{i=1}^{n} b^i (2\lambda x_i) = -2\lambda b \cdot x \leq 2\lambda |b||x| \qquad \text{per Cauchy-Schwarz,}$$

$$-e^{-\lambda r^2} \leq 0.$$

Consideriamo la regione aperta anulare $R := B^\circ(0,r) - B\left(0, \frac{r}{2}\right)$. Abbiamo (dal momento che $\frac{r}{2} < |x| < r$)

$$Lv \leq e^{-\lambda |x|^2} \left(-\lambda^2 \theta r^2 + 2\lambda \; tr(A) + 2\lambda |b| r - c\right) \leq 0 \tag{3.8}$$

in R, a meno di scegliere $\lambda > 0$ sufficientemente grande.

B. Conoscendo (3.7) esiste $\varepsilon > 0$ costante sufficientemente piccola tale che

$$u(\tilde{x}) \geq u(x) + \varepsilon v(x) \qquad \text{per } x \in \partial B\left(0, \frac{r}{2}\right), \tag{3.9}$$

perché $\partial B\left(0, \frac{r}{2}\right)$ è un compatto quindi v assume valori in un limitato (in particolare non va a $+\infty$). Osserviamo che

$$u(\tilde{x}) \geq u(x) + \varepsilon v(x) \qquad \text{per } x \in \partial B(0,r), \tag{3.10}$$

perché $v \equiv 0$ in $\partial B(0,r)$.

C. Da (3.8) segue che

$$\begin{aligned} L(u + \varepsilon v - u(\tilde{x})) &= -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} (u + \varepsilon v - u(\tilde{x}))_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i (u + \varepsilon v - u(\tilde{x}))_{x_i} + c(u + \varepsilon v - u(\tilde{x})) \\ &= Lu + \varepsilon Lv - cu(\tilde{x}) \leq Lu - cu(\tilde{x}) \leq -cu(\tilde{x}) \leq \\ &\leq 0 \qquad \text{in } R, \end{aligned}$$

perché $Lv \leq 0$ per (3.8), $Lu \leq 0$ in $R \subset U$ per ipotesi e $u(\tilde{x}) \geq 0$ per ipotesi (si osservi che se si assume $c \equiv 0$ quest'ultima condizione risulta non necessaria). Da (3.9) e (3.10) si deduce che

$$u + \varepsilon v - u(\tilde{x}) \leq 0 \qquad \text{su } \partial R = \partial B(0,r) \cup \partial B\left(0, \frac{r}{2}\right).$$

Per il Principio del Massimo Debole con $c \geq 0$ (3.1.2) poiché $L(u + \varepsilon v - u(\tilde{x})) \leq 0$ in R si ha

$$\max_R (u + \varepsilon v - u(\tilde{x})) \leq \max_{\overline{R}} (u + \varepsilon v - u(\tilde{x})) \leq \max_{\partial R} (u + \varepsilon v - u(\tilde{x}))^+ \leq 0,$$

$$u + \varepsilon v - u(\tilde{x}) \leq 0 \qquad \text{su } R.$$

Ma in $\tilde{x}$ si ha

$$u(\tilde{x}) + \varepsilon v(\tilde{x}) - u(\tilde{x}) = \varepsilon v(\tilde{x}) = 0 \qquad \text{perché } \tilde{x} \in \partial B(0,r).$$

Quindi se si fa la derivata direzionale con ν vettore unitario esterno a B in $\tilde{x}$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial \nu} (u(x) + \varepsilon v(x) - u(\tilde{x}))|_{x = \tilde{x}} \geq 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u(\tilde{x}) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \nu} v(\tilde{x}) \geq 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial \nu} u(\tilde{x}) \geq -\varepsilon \frac{\partial}{\partial \nu} v(\tilde{x}) = -\frac{\varepsilon}{r} Dv(\tilde{x}) \cdot \tilde{x} = 2\lambda \varepsilon r e^{-\lambda r^2} > 0.$$

perché in questo caso si ha $\nu = \frac{\tilde{x}}{r}$ dove $|\tilde{x}| = r$ e in generale $\frac{\partial}{\partial \nu} f(\tilde{x}) = Df(\tilde{x}) \cdot \nu$ (e per definizione $Df(x) = \left(\partial_{x_i} f(x)\right)_{i=1,\dots,n}$). □

Oss. 4. Si può ovviamente enunciare e dimostrare un risultato del tutto analogo con $c \geq 0$ e $Lu \geq 0$, $\tilde{x}$ tale che $u(\tilde{x}) < u(x)$ per ogni $x \in U$ e $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\tilde{x}) < 0$ con ν vettore unitario esterno a B in $\tilde{x}$. Quindi se μ è un vettore unitario interno a B in $\tilde{x}$ si ha $\frac{\partial u}{\partial \mu}(\tilde{x}) > 0$.

Questo risultato introduce il seguente teorema:

Teorema 3.1.4. (PRINCIPIO DEL MASSIMO FORTE)

Sia $U \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ un aperto limitato e connesso. Sia data una funzione $u \in \mathscr{C}^2(U) \cap \mathscr{C}^1(\overline{U})$ e un operatore differenziale del secondo ordine ellittico L tale che $c \equiv 0$ in U. Allora:

(I) se $Lu \leq 0$ in U e u realizza il massimo su $\overline{U}$ in un punto interno allora u è costante in U;

(II) se $Lu \geq 0$ in U e u realizza il minimo su $\overline{U}$ in un punto interno allora u è costante in U.

Dimostrazione.

A. Definiamo $M := \max_{\overline{U}} u$ e $C := \{x \in U \mid u(x) = M\}$ che risulta chiuso. Ora se $u \not\equiv M$ sia $V := \{x \in U \mid u(x) < M\} = U \smallsetminus C$ è non vuoto. Sia y un punto di V tale che $\operatorname{dist}(y, C) < \operatorname{dist}(y, \partial U)$ e B sia la palla più grande centrata in y tale che $B^\circ \subset V$. Quindi esiste $\tilde{x} \in C$ con $\tilde{x} \in \partial B$. La condizione di palla interna è verificata per V in $\tilde{x}$. Pertanto vale il Lemma di Hopf:
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\tilde{x}) > 0.$$
Ma in $\tilde{x}$ c'è un massimo per u, quindi $Du(\tilde{x}) = 0$ e dunque
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\tilde{x}) = 0.$$
Questa è una contraddizione.

B. Il caso del minimo discende dal caso appena dimostrato osservando che $-u$ è sottosoluzione ogni qualvolta che u è supersoluzione. □

Vale poi la naturale estensione:

Teorema 3.1.5. (PRINCIPIO DEL MASSIMO FORTE CON $c \geq 0$)

Sia $U \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ un aperto limitato e connesso. Sia data una funzione $u \in \mathscr{C}^2(U) \cap \mathscr{C}(\overline{U})$ e un operatore differenziale del secondo ordine ellittico L tale che $c \geq 0$ in U. Allora:

(I) se $Lu \leq 0$ in U e u realizza il massimo non negativo su $\overline{U}$ in un punto interno allora u è costante in U;

(II) se $Lu \geq 0$ in U e u realizza il minimo non positivo su $\overline{U}$ in un punto interno con un valore allora u è costante in U.

Dimostrazione.

La dimostrazione è esattamente quella precedente, utilizzando il risultato (II) del Lemma di Hopf. □

3.2 Principio del Massimo: versione utile

In questa sezione estenderemo i risultati appena visti in una forma utile nella dimostrazione del Teorema (0.0.1).
Prima di iniziare osserviamo che il Laplaciano $\Delta = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ è un operatore differenziale parziale del secondo ordine. Esso è inoltre ellittico in maniera del tutto banale perché gli corrisponde la matrice $\mathbb{I}_n$ costante, dunque basta prendere $\theta = 1$. Infine il suo termine di ordine zero è $\equiv 0$. Per esempio riformuliamo il Principio del Massimo (3.1.1):

Teorema 3.2.1. *Sia $\Omega := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| > \lambda\right\}$ per qualche $\lambda > 0$. Sia $w \in \mathscr{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$ una funzione tale che:*

(I) $\Delta w(x) \leq 0$ per $x \in \Omega$;

(II) $w(x) \geq 0$ per $x \in \partial\Omega$;

(III) $\liminf\limits_{|x| \to +\infty} w(x) \geq 0$.

Allora ci sono due possibilità:

(A) $w \equiv 0$ in $\overline{\Omega}$, oppure:

(B) $w(x) > 0$ per $x \in \Omega$.

Dimostrazione.

A. Definiamo $\Omega_\Lambda := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda < |x| < \Lambda\right\}$ con $\Lambda > \lambda$. Si ha allora che Ω_Λ è aperto limitato contenuto in $\mathbb{R}^n$ e inoltre $w \in \mathscr{C}^2\left(\overline{\Omega_\Lambda}\right)$ per definizione. Consideriamo l'operatore differenziale del secondo ordine $L = -\Delta$, ovvero

$$a^{ij} = \delta_{ij} \qquad \text{con } i,j \in \{1,\dots,n\}, \qquad b^i \equiv 0 \qquad \text{con } i \in \{1,\dots,n\}, \qquad c \equiv 0.$$

Quindi $Lw = -\Delta w \geq 0$ in Ω_Λ per ipotesi e dunque:

$$\min_{\overline{\Omega_\Lambda}} w = \min_{\partial\Omega_\Lambda} w.$$

Ora $\partial\Omega_\Lambda = \{|x| = \lambda\} \cup \{|x| = \Lambda\}$. Intanto osserviamo che $w \geq 0$ su Ω_Λ. Altrimenti esisterebbe $\overline{x} \in \Omega_\Lambda$ tale che $w\left(\overline{x}\right) < 0$. Ma $\liminf_{|x|\to+\infty} w(x) \geq 0$ quindi esisterebbe R tale che $w(x) \geq \frac{w(\overline{x})}{2}$ per x tale che $|x| \geq R$. Allora su Ω_R le ipotesi del Principio del Massimo Debole sarebbero verificate ma la tesi risulterebbe falsa. Questa è una contraddizione.

B. Supponiamo ora che esista $\overline{x} \in \Omega$ tale che $w\left(\overline{x}\right) = 0$. Allora $\overline{x}$ sarebbe punto di minimo interno per w in Ω_Λ per ogni $\Lambda > |\overline{x}|$. Possiamo allora concludere per mezzo del Principio del Massimo Forte che per ogni $\Lambda > |\overline{x}|$ la funzione sia costante, e dunque costantemente zero su Ω_Λ (che è connesso). Pertanto risulta $w \equiv 0$ in Ω perché quanto dimostrato prima vale definitivamente per Λ. $\square$

Facciamo la stessa cosa con il Lemma di Hopf

Teorema 3.2.2. *Sia $\Omega := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| > \lambda\right\}$ per qualche $\lambda > 0$. Sia $w \in \mathscr{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$ una funzione tale che:*

(I) $\Delta w(x) \leq 0$ *per* $x \in \Omega$,

(II) $w(x) > 0$ *per* $x \in \Omega$,

(III) $w(x_0) = 0$ *per qualche* $x_0 \in \partial\Omega$.

Allora si ha

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) > 0$$

con ν vettore unitario interno a Ω in x_0.

Dimostrazione.

Come fatto precedentemente possiamo restringerci a Ω_Λ con $\Lambda > \lambda$ fissato. Consideriamo ancora l'operatore differenziale del secondo ordine $L = -\Delta$. Abbiamo $w \in \mathscr{C}^2\left(\overline{\Omega_\Lambda}\right)$. Ora $c \equiv 0$ in $\overline{\Omega_\Lambda}$ e $Lw = -\Delta w \geq 0$ in Ω_Λ. Inoltre in x_0 c'è banalmente la condizione di palla interna e $w(x_0) = 0 < w(x)$ per ogni $x \in \Omega$. Segue che

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) > 0$$

e questo conclude la dimostrazione. $\square$

3.3 Dimostrazione del teorema sulla simmetria rispetto l'inversione sferica delle soluzioni

Dimostriamo ora il risultato centrale sulla simmetria rispetto l'inversione sferica delle soluzioni dell'equazione di Yamabe.

Teorema 3.3.1. (SIMMETRIA RISPETTO L'INVERSIONE SFERICA DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DI YAMABE)

Sia $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$ una funzione positiva che risolve l'equazione

$$\Delta u = -n(n-2)\, u^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Allora esiste $\lambda > 0$ tale che $u = u_\lambda$, dove u_λ è definita in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Dimostrazione.

(I) *Se $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$, $u > 0$, risolve l'equazione allora esiste $\lambda_0 > 0$ tale che $u_\lambda(x) \leq u(x)$ per tutti gli $|x| \geq \lambda$ e $\lambda \in (0, \lambda_0)$.*

Dimostrazione.

A. Definiamo la funzione ausiliaria

$$v_\lambda(x) := u(x) - u_\lambda(x), \qquad |x| \neq 0.$$

Ora $v_\lambda(x) = 0$ per $|x| = \lambda$. Detto $\varphi_x(\lambda) = v_\lambda(x)$ si ha:

$$\varphi_x(\lambda) = u(x) - \left(\frac{\lambda}{|x|}\right)^{n-2} u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right),$$

$$\begin{aligned}\varphi_x'(\lambda) &= -(n-2)\left(\frac{\lambda}{|x|}\right)^{n-3} \frac{1}{|x|} u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right) - \left(\frac{\lambda}{|x|}\right)^{n-2} \nabla u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right) \cdot 2\lambda \frac{x}{|x|^2} = \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{|x|}\right)^{n-2}\left[-(n-2)\, u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right) - 2\frac{\lambda^2}{|x|} \nabla u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right) \cdot \frac{x}{|x|}\right].\end{aligned}$$

Quindi esiste $\lambda_1 > 0$ tale che per $0 < \lambda \leq \lambda_1$ e $|x| \geq \lambda$ sia $\varphi_x'(\lambda) < 0$. Infatti si può fissare $\Lambda > 0$ e restringersi a studiare la derivata in $|x| \leq \Lambda$. Si osserva che

$$\begin{aligned}(n-2)\ u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right) + 2\,\frac{\lambda^2}{|x|}\,\nabla u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right) \cdot \frac{x}{|x|} \geq& \\ \geq (n-2)\ u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right) - 2\,\frac{\lambda^2}{|x|}\left|\nabla u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right)\right| \left|\frac{x}{|x|}\right| \geq& \\ \geq (n-2)\ u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right) - 2\,\lambda\left|\nabla u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right)\right|.&\end{aligned}$$

Quindi la condizione $\varphi_x'(\lambda) < 0$ equivale a richiedere che

$$\lambda \frac{2}{n-2} \frac{\left|\nabla u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right)\right|}{u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right)} < 1.$$

Siccome $|x| \le \Lambda$ si ha $\left|\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right| \le |x| \le \Lambda$.

Quindi $\frac{\left|\nabla u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right)\right|}{u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right)}$ ha un massimo in $|x| \le \Lambda$. Dunque esiste $\tilde{\lambda}$ tale che la condizione equivalente sopra esibita sia vera per $\lambda = \tilde{\lambda}$. Ora si prenda $\lambda_1 = \min\left\{\Lambda, \tilde{\lambda}\right\}$ ottenendo la condizione voluta.

B. Da quanto appena dimostrato e poiché $\varphi_x(\lambda = |x|) = 0$ si deduce

$$\varphi_x(\lambda) = v_\lambda(x) \ge 0, \qquad \text{per } 0 < \lambda \le |x| \le \lambda_1,$$

cioè equivalentemente

$$u_\lambda(x) \le u(x), \qquad \text{per } 0 < \lambda \le |x| \le \lambda_1.$$

Ora si rimuoverà la limitazione $|x| \le \lambda_1$. Consideriamo

$$w(x) := u(x) - \left(\frac{\lambda_1}{|x|}\right)^{n-2} \min_{|x|=\lambda_1} u(x)$$

che soddisfa

$$\begin{cases} \Delta w(x) < 0 & \text{per } |x| > 0 \\ w(x) \ge 0 & \text{per } |x| = \lambda_1 \\ \liminf\limits_{|x|\to+\infty} w(x) \ge 0. \end{cases}$$

Infatti per la prima osserviamo che:

$$\Delta u(x) = -n(n-2)\, u^{\frac{n+2}{n-2}}(x) < 0 \qquad \text{perché } u > 0,$$

$$\Delta\left(\frac{\lambda_1}{|x|}\right)^{n-2} = \frac{n-2}{\lambda_1}\left[n\left(\frac{\lambda_1}{|x|}\right)^{n-2} + \frac{n-2}{\lambda_1}\left(\frac{\lambda_1}{|x|}\right)^{n-2}|x|^2\right] > 0.$$

Per la seconda:

$$w(x) \underset{|x|=\lambda_1}{=} u(x) - \min_{|x|=\lambda_1} u(x) \ge 0.$$

Per la terza:

$$\liminf_{|x|\to+\infty} w(x) = \liminf_{|x|\to+\infty} u(x) - \liminf_{|x|\to+\infty}\left(\frac{\lambda_1}{|x|}\right)^{n-2} \min_{|x|=\lambda_1} u(x) \ge 0$$

perché il primo $\liminf$ è ≥ 0 per ipotesi, il secondo è un limite ed è uguale a 0. Dunque, sfruttando la versione del Principio del Massimo (3.2.1), risulta

$$w(x) \ge 0 \qquad \text{per ogni } |x| \ge \lambda_1.$$

Ora scegliamo $0 < \lambda_0 < \lambda_1$ tale che

$$\lambda_0^{n-2} \max_{|x|\leq\lambda_0} u(x) \leq \lambda_1^{n-2} \min_{|x|=\lambda_0} u(x).$$

Per $\lambda \leq \lambda_0$ e $|x| \geq \lambda_1$ si ha $\left|\frac{\lambda^2 x}{|x|^2}\right| = \frac{\lambda^2}{|x|} \leq \frac{\lambda_0^2}{\lambda_1} < \lambda_0$. Pertanto:

$$\begin{aligned} u_\lambda(x) &= \left(\frac{\lambda}{|x|}\right)^{n-2} u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right) \leq \left(\frac{\lambda_0}{|x|}\right)^{n-2} \max_{|x|\leq\lambda_0} u(x) \leq \\ &\leq {\lambda_1}^{n-2} \min_{|x|=\lambda_0} u(x) \leq \\ &\leq u(x) \qquad\qquad \text{per } |x| \geq \lambda_1 \ e\ \lambda \leq \lambda_0. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque provato la tesi del passaggio (I). □

Definiamo ora

$$\overline{\lambda} := \sup\left\{\lambda_0 > 0 \mid u(x) \geq u_\lambda(x) \text{ per ogni } |x| \geq \lambda \text{ e } \lambda \in (0, \lambda_0)\right\}.$$

Nel passaggio (I) si è dimostrato che esiste almeno un $\lambda_0 > 0$, dunque la definizione è ben posta. Può essere $\overline{\lambda} = +\infty$.

(II) *Se $\overline{\lambda} < +\infty$ allora è $u \equiv u_{\overline{\lambda}}$ e il Teorema sulla simmetria delle soluzioni è provato.*

Dimostrazione.

A. Consideriamo la funzione

$$v_{\overline{\lambda}}(x) := u(x) - u_{\overline{\lambda}}(x).$$

Siccome se u è soluzione allora lo è anche $u_{\overline{\lambda}}$ si ha

$$\Delta v_{\overline{\lambda}} = \Delta u - \Delta u_{\overline{\lambda}} = -n(n-2)\left(u^{\frac{n+2}{n-2}} - u_{\overline{\lambda}}^{\frac{n+2}{n-2}}\right).$$

$v_{\overline{\lambda}}$ soddisfa

$$\begin{cases} \Delta v_{\overline{\lambda}}(x) \leq 0 & \text{per } |x| \geq \overline{\lambda} \\ v_{\overline{\lambda}}(x) = 0 & \text{per } |x| = \overline{\lambda} \\ \liminf_{|x|\to+\infty} v_{\overline{\lambda}}(x) \geq 0. \end{cases}$$

Infatti per la prima osserviamo che:

$$u^{\frac{n+2}{n-2}} - u_{\overline{\lambda}}^{\frac{n+2}{n-2}} \geq 0 \qquad\qquad \text{per } |x| \geq \overline{\lambda}.$$

Ma per $|x| \geq \overline{\lambda}$ si ha che

$$u(x) \geq u_\lambda(x) \qquad\qquad \text{per ogni } \lambda \in (0, \lambda_0),\ \forall \lambda_0,$$

$$u(x) \geq u_\lambda(x) \qquad\qquad \forall \lambda \in \left(0, \overline{\lambda}\right)$$

$$u(x) \geq u_{\overline{\lambda}}(x),$$

passando al limite le disuguaglianze si conservano.
La seconda e la terza sono invece condizioni standard e di semplice verifica.
Allora per la versione del Principio del Massimo (3.2.1) si hanno due casi:

(a) $v_{\overline{\lambda}} \equiv 0$ per $|x| \geq \overline{\lambda}$,

(b) $v_{\overline{\lambda}}(x) > 0$ per $|x| > \overline{\lambda}$.

Per prima cosa osserviamo che il caso (a) si estende a tutto $\mathbb{R}^n$. Infatti sia x tale che $|x| \leq \overline{\lambda}$ e si consideri $\tilde{x} := \frac{\overline{\lambda}^2}{|x|^2} x$. Ora $|\tilde{x}| \geq \overline{\lambda}$ e quindi

$$\left(\frac{|x|}{\overline{\lambda}}\right)^{n-2} u(x) = \left(\frac{\overline{\lambda}}{|\tilde{x}|}\right)^{n-2} u\left(\frac{\overline{\lambda}^2}{|\tilde{x}|^2}\tilde{x}\right) = u_{\overline{\lambda}}(\tilde{x}) = u(\tilde{x}) = \left(u_{\overline{\lambda}}\right)_{\overline{\lambda}}(\tilde{x}) =$$
$$= \left(\frac{\overline{\lambda}}{|\tilde{x}|}\right)^{n-2} u_{\overline{\lambda}}\left(\frac{\overline{\lambda}^2}{|\tilde{x}|^2}\tilde{x}\right) = \left(\frac{|x|}{\overline{\lambda}}\right)^{n-2} u_{\overline{\lambda}}(x),$$

(dove è stato fondamentale il fatto che la simmetria rispetto alla sfera di raggio λ abbia periodo 2, ovvero ripetuta due volte a una funzione dia l'identità) pertanto $u(x) \equiv u_{\overline{\lambda}}(x)$ anche per $|x| \leq \overline{\lambda}$.

B. Proveremo ora che (b) è impossibile.
Per il Lemma di Hopf si ha $\frac{\partial v_{\overline{\lambda}}}{\partial \nu}(x) > 0$ per $|x| = \overline{\lambda}$, con ν il vettore unitario normale esterno alla palla $|x| \leq \overline{\lambda}$ (quindi interno a $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| > \overline{\lambda}\right\}$).
Per continuità esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\frac{\partial v_{\overline{\lambda}}}{\partial \nu}(x) > 0 \qquad \overline{\lambda} \leq \lambda \leq \overline{\lambda} + \varepsilon,\ \lambda \leq |x| \leq \lambda + \varepsilon$$

con $\nu = \nu(x)$ vettore esterno normale alla palla centrata in 0 di raggio $|x|$. Da questo e da $v_\lambda(x) = 0$ per $|x| = \lambda$ segue $v_\lambda(x) > 0$ per $\overline{\lambda} \leq \lambda \leq \overline{\lambda} + \varepsilon$ e $\lambda < |x| \leq \overline{\lambda} + \varepsilon\,(\lambda + \varepsilon)$. Se si rimuove la restrizione $|x| \leq \overline{\lambda} + \varepsilon$ per qualche $\overline{\lambda} < \lambda_0 \leq \overline{\lambda} + \varepsilon$ si arriva a una contraddizione con la definizione di $\overline{\lambda}$. Infatti si avrebbe $\lambda_0 > \overline{\lambda}$ tale che $u(x) \geq u_\lambda(x)\ \forall |x| \geq \lambda$ e $\lambda \in (0, \lambda_0)$ (per $\lambda \in \left[\overline{\lambda}, \lambda_0\right)$ per come si è costruito λ_0, per $\lambda \in \left(0, \overline{\lambda}\right)$ per la definizione di $\overline{\lambda}$). Sia $r = \overline{\lambda} + \varepsilon$ e consideriamo

$$z(x) := v_{\overline{\lambda}}(x) - \left(\frac{r}{|x|}\right)^{n-2} \min_{|x|=r} v_{\overline{\lambda}}(x)$$

e notiamo che questo minimo è > 0 perché $v_{\overline{\lambda}}(x) > 0$ se $|x| = r > \overline{\lambda}$ perché siamo nel caso (b) (e questo tornerà utile in seguito). Quindi

$$\begin{cases} \Delta z(x) \leq 0 & \text{per } |x| \geq r \\ z(x) = 0 & \text{per } |x| = r \\ \liminf\limits_{|x| \to +\infty} z(x) \geq 0 & \end{cases}$$

come già visto nei casi precedenti.

Per il Principio del Minimo segue $z(x) \geq 0$ per $|x| \geq 0$, cioè

$$u(x) - u_{\overline{\lambda}}(x) - \left(\frac{r}{|x|}\right)^{n-2} \min_{|x|=r} \left(u(x) - u_{\overline{\lambda}}(x)\right) \geq 0 \qquad \text{per } |x| \geq r.$$

Quindi $\forall \lambda > 0$ si ha

$$u(x) - u_{\lambda}(x) \geq u_{\overline{\lambda}}(x) - u_{\lambda}(x) + \left(\frac{r}{|x|}\right)^{n-2} \min_{|x|=r} \left(u(x)\, u_{\overline{\lambda}}(x)\right) \qquad \text{per } |x| \geq r.$$

Se si trova $\overline{\lambda} < \lambda_0 < r$ tale che

$$|u_{\overline{\lambda}}(x) - u_{\lambda_0}(x)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{r}{|x|}\right)^{n-2} \min_{|x|=r} \left(u(x) - u_{\overline{\lambda}}(x)\right) \qquad \text{per } |x| \geq r$$

allora

$$\begin{aligned} u(x) - u_{\lambda_0}(x) &\geq \left(\frac{r}{|x|}\right)^{n-2} \min_{|x|=r} \left(u(x) - u_{\overline{\lambda}}(x)\right) - |u_{\overline{\lambda}}(x) - u_{\lambda_0}(x)| \geq \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\frac{r}{|x|}\right)^{n-2} \min |x| = r \left(u(x) - u_{\overline{\lambda}}(x)\right) > 0 \qquad \text{per } |x| \geq r \end{aligned}$$

Quindi $v_{\lambda_0} > 0$ per $|x| \geq r$. Ora

$$|u_{\overline{\lambda}}(x) - u_{\lambda}(x)| = \frac{1}{|x|^{n-2}} \left| \overline{\lambda}^{n-2} u\left(\overline{\lambda}^2 \frac{x}{|x|^2}\right) - \lambda^{n-2} u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right)\right|,$$

$$\lim_{\lambda \downarrow \overline{\lambda}} \sup_{|x| \geq r} \left| \overline{\lambda}^{n-2} u\left(\overline{\lambda}^2 \frac{x}{|x|^2}\right) - \lambda^{n-2} u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right)\right|.$$

Infatti u assume valori in un limitato (perché continua e $\left|\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right| \leq \lambda^2$ e $\left|\overline{\lambda}^2 \frac{x}{|x|^2}\right| \leq \overline{\lambda}^2 \leq \lambda^2$ dal momento che stiamo facendo il limite per $\lambda \downarrow \overline{\lambda}$). Pertanto il limite è $= 0$ per uniforme continuità. Quindi siccome $\min_{|x|=r} \left(u(x)\, u_{\overline{\lambda}}(x)\right) > 0$ siccome siamo nel caso (b), allora esiste λ_0 voluto.

Dunque risulta dimostrato il passaggio (II). □

Dato $b \in \mathbb{R}^n$ sia

$$u^{(b)}(x) := u(x+b).$$

Siccome u è soluzione allora lo è anche $u^{(b)}$. Sia

$$\overline{\lambda}_b := \sup \left\{\lambda_0 > 0 \,:\, u^{(b)}(x) \geq u_{\lambda}^{(b)}(x) \text{ per ogni } |x| \geq \lambda \text{ e } \lambda \in (0, \lambda_0)\right\},$$

dove $u_{\lambda}^{(b)}(x)$ è la funzione che si ottiene facendo la simmetria sferica per $u(x)$ rispetto alla sfera di raggio λ centrata in b.

(III) *Se esiste* $\overline{b} \in \mathbb{R}^n$ *tale che* $\overline{\lambda}_b = +\infty$ *allora è* $u \equiv 0$.

Dimostrazione.

A. Per prima cosa dimostreremo che se $\overline{\lambda}_{\overline{b}} = +\infty$ per qualche $\overline{b}$ allora questa condizione deve valere per ogni $b \in \mathbb{R}^n$. Infatti se esiste $\overline{b} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\overline{\lambda}_{\overline{b}} = +\infty$

$$\forall \lambda > 0 \qquad u^{(\overline{b})}(x) \geq u_{\lambda}^{(\overline{b})}(x) \qquad \text{per } |x| \geq \lambda,$$

cioè

$$\forall \lambda > 0 \qquad u\left(\overline{b} + x\right) \geq \left(\frac{\lambda}{|x|}\right)^{n-2} u\left(\overline{b} + \lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right) \qquad \text{per } |x| \geq \lambda,$$

$$\forall \lambda > 0 \qquad u(x) \geq \left(\frac{\lambda}{|x - \overline{b}|}\right)^{n-2} u\left(\overline{b} + \lambda^2 \frac{x - \overline{b}}{|x - \overline{b}|^2}\right) \qquad \text{per } |x - \overline{b}| \geq \lambda.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\liminf_{|x| \to +\infty} |x|^{n-2} u(x) &\geq \liminf_{|x| \to +\infty} \left(\frac{\lambda |x|}{|x - \overline{b}|}\right)^{n-2} u\left(\overline{b} + \lambda^2 \frac{x - \overline{b}}{|x - \overline{b}|^2}\right) = \\ &= \lim_{|x| \to +\infty} \left(\frac{\lambda |x|}{|x - \overline{b}|}\right)^{n-2} u\left(\overline{b} + \lambda^2 \frac{x - \overline{b}}{|x - \overline{b}|^2}\right) = \lambda^{n-2} u\left(\overline{b}\right) > 0\end{aligned}$$

e questo vale per ogni $\lambda > 0$. Pertanto

$$\liminf_{|x| \to +\infty} |x|^{n-2} u(x) = +\infty. \tag{3.11}$$

Se ora esiste $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\overline{\lambda}_{\tilde{b}} < +\infty$ allora per il passaggio (II) si ha

$$u^{(\tilde{b})} = u_{\overline{\lambda}_{\tilde{b}}}^{(\tilde{b})}$$

cioè

$$u\left(\tilde{b} + x\right) = \left(\frac{\overline{\lambda}_{\tilde{b}}}{|x|}\right)^{n-2} u\left(\tilde{b} + \overline{\lambda}_{\tilde{b}}^2 \frac{x}{|x|^2}\right) \qquad \text{per } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$u(x) = \left(\frac{\overline{\lambda}_{\tilde{b}}}{|x - \tilde{b}|}\right)^{n-2} u\left(\tilde{b} + \overline{\lambda}_{\tilde{b}}^2 \frac{x - \tilde{b}}{|x - \tilde{b}|^2}\right) \qquad \text{per } x \in \mathbb{R}^n.$$

Ma questo è in contraddizione con (3.11). Quindi

$$\overline{\lambda}_b = +\infty \qquad \forall b \in \mathbb{R}^n.$$

B. Dunque per ogni b fissato si ha

$$\forall \lambda > 0 \qquad \varphi_{b,x}(\lambda) = u(x) - \left(\frac{\lambda}{|x - b|}\right)^{n-2} u\left(\overline{b} + \lambda^2 \frac{x - b}{|x - b|^2}\right) \qquad \text{per } |x - b| \geq \lambda.$$

Ora

$$\begin{aligned}\varphi'_{b,x}(\lambda) = &-(n-2)\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{|x - b|}\right)^{n-2} u\left(\overline{b} + \lambda^2 \frac{x - b}{|x - b|^2}\right) - \\ &-\left(\frac{\lambda}{|x - b|}\right)^{n-2} \nabla u\left(\overline{b} + \lambda^2 \frac{x - b}{|x - b|^2}\right) \cdot 2\lambda \frac{x - b}{|x - b|^2}.\end{aligned}$$

Dal momento che $\varphi_{b,x}(|x-b|) = 0$ deve essere (poiché $\lambda \leq |x-b|$)

$$\varphi'_{b,x}(\lambda|x-b|) \leq 0,$$

$$-\frac{n-2}{|x-b|}u(x) - \nabla u(x) \cdot 2\lambda \frac{x-b}{|x-b|} \leq 0.$$

Se ora si lascia $|b| \to +\infty$ in qualche direzione

$$-\nabla u(x) \cdot \frac{x-b}{|x-b|} \leq 0.$$

Ma allora

$$-\nabla u(x) \cdot \xi \leq 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ |\xi| = 1.$$

Di conseguenza

$$\nabla u(x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Da cui risulta $\Delta u \equiv 0$ e pertanto $u \equiv 0$ perché risolve l'equazione $\Delta u = -n(n-2)\,u^{\frac{n+2}{n-2}}$.

□

La dimostrazione del teorema di partenza è ora immediata.
Siccome cerchiamo soluzioni positive deve essere $\overline{\lambda}_b < +\infty$ per ogni $b \in \mathbb{R}^n$ (per il passaggio (III)), in particolare per $b = 0$. Quindi dal passaggio (II) segue $u = u_{\overline{\lambda}}$. □

Capitolo 4

Classificazione delle soluzioni dell'equazione di Yamabe

Sono stati sviluppati tutti gli strumenti necessari alla elegante dimostrazione di Li e Zhang del Teorema enunciato nell'Introduzione. Prima osserveremo come il risultato (3.3.1) fornisca delle buone proprietà di integrabilità delle soluzioni.

4.1 Buone proprietà di integrabilità delle soluzioni

Dal Teorema 3.3.1 si possono derivare buone proprietà di integrabilità delle soluzioni positive u dell'equazione di Yamabe (che abbiamo provato essere valide per l'insieme di funzioni $u_{\lambda,x_0}(x)$ proposte come soluzioni). Nello specifico $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n)$ e $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Queste, in particolare il comportamento all'infinito, sono anche le ipotesi necessarie sulle funzioni coinvolte nella disequazione di Sobolev studiata nel Capitolo 1, nonchè l'assunzione aggiuntiva usata da Gidas, Ni e Nirenberg per dimostrare il teorema sulla classificazione delle soluzioni in [**GNN**]. Vale il seguente risultato

Proposizione 4.1.1. *Sia* $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$, $u > 0$ *soluzione dell'equazione di Yamabe. Allora esiste* $C > 0$ *tale che*

$$u(x) \leq C(1+|x|)^{2-n}, \qquad |\nabla u(x)| \leq C\ (1+|x|)^{1-n},$$

per tutti gli $x \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione.

Esiste $\lambda > 0$ tale che $u = u_\lambda$, cioè

$$u(x) = \left(\frac{\lambda}{|x|}\right)^{n-2} u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|}\right).$$

Ora per $|x| \le \lambda$ si ha che esiste una costante A_1 tale che $u(x) \le A_1$ perché funzione continua su un limitato. Invece per $|x| \ge \lambda$ vale

$$\left(\frac{\lambda}{|x|}\right)^{n-2} u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|}\right) = \left(\frac{1}{|x|}\right)^{n-2} \lambda^{n-2} u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|}\right) \le \left(\frac{1}{|x|}\right)^{n-2} A_2.$$

La costante A_2 esiste perché per $|x| \ge \lambda$ si ha che $\left|\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right| \le \lambda$ e dunque si sta valutando una funzione continua su un limitato.
Quindi detto $A := \max\left\{A_1 (1+\lambda)^{n-2},\ A_2 \frac{(1+\lambda)^{n-2}}{\lambda^{n-2}}\right\}$ si ha

$$u(x) \le A(1+|x|)^{2-n}$$

per tutti gli $x \in \mathbb{R}^n$. Ora

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i} u(x) = \partial_{x_i} &\left[\left(\frac{\lambda}{|x|}\right)^{n-2} u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|}\right)\right] = \\
&= (n-2)\left(\frac{\lambda}{|x|}\right)^{n-3} \lambda \left(-\frac{1}{|x|^3} x_i\right) u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|}\right) + \left(\frac{\lambda}{|x|}\right)^{n-2} \sum_{j=1}^{n} \left(\partial_{x_j} u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|}\right) \lambda^2 \partial_{x_i}\left(\frac{x_j}{|x|^2}\right)\right) = \\
&= (n-2)\left(\frac{\lambda}{|x|}\right)^{n} \frac{1}{\lambda^2} x_i u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|}\right) + \lambda^2 \left(\frac{\lambda}{|x|}\right)^{n-2} \nabla u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|}\right) \cdot \left(\frac{e_i}{|x|^2} - 2x_i \frac{x}{|x|^4}\right).
\end{aligned}$$

Per $|x| \le \lambda$ si ha che esiste una costante B_1 tale che $|\nabla u(x)| \le B_1$ perché funzione continua su un limitato. Per $|x| \ge \lambda$ si ha

$$\begin{aligned}
|\nabla u(x)| = |\ldots| &\le (n-2)\lambda^{n-2} \frac{1}{|x|^n} n|x| \left|u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|}\right)\right| + \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda^n \frac{1}{|x|^{n-2}} \left|\nabla u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|}\right)\right| \left|\frac{e_i}{|x|^2} - 2x_i \frac{x}{|x|^4}\right|\right) \le \\
&\le P \frac{1}{|x|^{n-1}} \left|u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|}\right)\right| + Q \frac{1}{|x|^n} \left|u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|}\right)\right| \le B_2 \frac{1}{|x|^{n-1}}
\end{aligned}$$

Nella prima maggiorazione infatti si nota che

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x| \le n|x|,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{e_i}{|x|^2} - 2x_i \frac{x}{|x|^4}\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{|x|^2} + 2\frac{|x_i|}{|x|^3}\right) \le 3n \frac{1}{|x|^2},$$

mentre nell'ultima esiste la costante B_2 per lo stesso motivo accennato sopra.
Quindi detto $B := \max\left\{B_1 (1+\lambda)^{n-1},\ B_2 \frac{(1+\lambda)^{n-1}}{\lambda^{n-1}}\right\}$ si ha

$$|\nabla u(x)| \le B(1+|x|)^{1-n}$$

per tutti gli $x \in \mathbb{R}^n$.
Basta allora definire $C := \max\{A,\ B\}$ e abbiamo la tesi voluta. □

Oss. 5. La funzione $u_\lambda(x)$ a priori è definita per $x \neq 0$. D'altra parte se $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$ risolve l'equazione di Yamabe (1) allora si ha (a meno di traslazioni) $u_\lambda = u$. Dunque $u_\lambda \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$ e risolve (1) su tutto $\mathbb{R}^n$.

4.2 Classificazione secondo Li e Zhang

In questa sezione calcoleremo le soluzioni dell'equazione di Yamabe esibite nel Teorema iniziale sfruttando il risultato sulla simmetria sferica delle soluzioni e le buone proprietà di integrabilità appena dimostrati.
Sia $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$, $u > 0$, una soluzione di (1); per la proposizione appena illustrata si ha che $\lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0$. Quindi esiste un punto di massimo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ per u. A meno di traslazioni possiamo assumere che sia $x_0 = 0$ e quindi $\nabla u(0) = 0$. Inoltre per il Teorema 3.3.1 si sa $u = u_\lambda$.
Ora la funzione $u^{(b)}(x) = u(x+b)$, $b \in \mathbb{R}^n$ risolve l'equazione (1) quindi esiste $\lambda_b > 0$ tale che $u^{(b)} = u^{(b)}_{\lambda_b}$, cioè

$$u(x) = \left(\frac{\lambda_b}{|x-b|}\right)^{n-2} u\left(b + \lambda_b^2 \frac{x-b}{|x-b|^2}\right).$$

Sapendo $u(x) = u_\lambda(x) = \left(\frac{\lambda}{|x|}\right)^{n-2} u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right)$ si ha

$$u\left(\lambda^2 \frac{x}{|x|^2}\right) = \left(\frac{\lambda_b}{|x-b|}\frac{|x|}{\lambda}\right)^{n-2} u\left(b + \lambda_b^2 \frac{x-b}{|x-b|^2}\right). \tag{4.1}$$

Per $|x| \to +\infty$ si ha

$$u(0) = \left(\frac{\lambda_b}{\lambda}\right)^{n-2} u(b). \tag{4.2}$$

Calcoliamo ora lo sviluppo di Taylor di entrambi i lati in (4.1).
A sinistra sappiamo che in 0 si ha $\nabla u(0) = 0$, quindi calcolando lo sviluppo intorno a 0 si ha

$$u(0) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \qquad \text{per } |x| \to +\infty.$$

A destra calcolando lo sviluppo intorno a b si ha invece

$$\left(\frac{\lambda_b}{|x-b|}\frac{|x|}{\lambda}\right)^{n-2} \left\{u(b) + \nabla u(b) \cdot \lambda_b^2 \frac{x-b}{|x-b|^2} + o\left(\frac{1}{|x-b|}\right)\right\} \qquad \text{per } |x| \to +\infty\,.$$

Usando (4.2) e riordinando otteniamo

$$u(0)\left\{1 - \left(\frac{|x|}{|x-b|}\right)^{n-2}\right\} + o\left(\frac{1}{|x|}\right) = \left(\frac{\lambda_b}{\lambda}\right)^{n-2}\left(\frac{|x|}{|x-b|}\right)^{n-2} \nabla u(b) \cdot \lambda_b^2 \frac{x-b}{|x-b|^2}.$$

Ora si moltiplica a destra e sinistra per x_i e si passa al limite per $x_i \to +\infty$.
Osserviamo che

$$\begin{aligned}\lim_{x_i \to +\infty} x_i \left\{1 - \left(\frac{|x|}{|x-b|}\right)^{n-2}\right\} &= \lim_{x_i \to +\infty} x_i \left\{1 - \left(\frac{x_i}{x_i - b_i}\right)^{n-2}\right\} = \\ &= \lim_{x_i \to +\infty} x_i \left\{\frac{(x_i - b_i)^{n-2} - x_i^{n-2}}{(x_i - b_i)^{n-2}}\right\} = (n-2)(-b_i)\,.\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\lim_{x_i \to +\infty} x_i \left(\nabla u(b) \cdot \frac{x-b}{|x-b|^2}\right) &= \lim_{x_i \to +\infty} \left(\nabla u(b) \cdot (x_i - b_i)\frac{(x-b)}{|x-b|^2}\right) = \\ &= \lim_{x_i \to +\infty} \partial_{x_i} u(b) \frac{(x_i - b_i)^2}{|x-b|^2} = \partial_{x_i} u(b)\,.\end{aligned}$$

Da cui

$$(2-n)\,u(0)\,b_i = \lambda^2\left(\frac{\lambda_b}{\lambda}\right)^n \partial_{x_i} u(b).$$

Usando ancora (4.2) si ottiene

$$(2-n)\,u(0)\,b_i = \lambda^2\left(\frac{u(0)}{u(b)}\right)^{\frac{n}{n-2}} \partial_{x_i} u(b).$$

Pertanto si ha (il gradiente è fatto rispetto all'incognita b)

$$\nabla\left(\lambda^2 u(b)^{\frac{2}{2-n}} - u(0)^{\frac{2}{2-n}}|b|^2\right) = \lambda^2\frac{2}{2-n}u(b)^{\frac{n}{2-n}}\nabla u(b) - u(0)^{\frac{2}{2-n}}2b = 0.$$

Quindi

$$u(b)^{\frac{2}{2-n}} = u(0)^{\frac{2}{2-n}}|b|^2\frac{1}{\lambda^2} + K\frac{1}{\lambda^2}.$$

Se $b=0$ si ha $\frac{1}{\lambda^2}K = u(0)^{\frac{2}{2-n}}$. Di conseguenza

$$u(b) = u(0)\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+|b|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} \qquad b\in\mathbb{R}^n.$$

Infine sostituendo in (1) si ricava la condizione $u(0) = \lambda^{\frac{2-n}{2}}$.

Infatti l'evidente simmetria sferica della soluzione mi permette di scriverla nella forma

$$\phi(r=|b|) = u(b) = \phi(0)\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+r^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

Derivando

$$\phi'(r) = -\phi(0)(n-2)\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+r^2}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{\lambda^2}r,$$

$$\phi''(r) = \phi(0)(n-2)\,n\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+r^2}\right)^{\frac{n+2}{2}}\frac{1}{\lambda^4}r^2 - \phi(0)(n-2)\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2+r^2}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{\lambda^2}.$$

Come già visto nel Capitolo 2 l'equazione equivalente a quella di Yamabe in cordinate polari in condizione di simmetria sferica risulta

$$\varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) = -n(n-2)\,\varphi(r)^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Dunque sostituendo risulta $\phi(0) = \lambda^{\frac{2-n}{2}}$ e di conseguenza $u(b) = \left(\frac{\lambda}{\lambda^2+|b|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$.

Pertanto a meno di traslazioni dell'origine le soluzioni sono in questa forma e il Teorema iniziale risulta dimostrato.

1

Bibliografia

[**LL**] E. Lieb and M. Loss, *Analysis* (2nd edition), Graduate Studies in Mathemathics, 14. AMS, Providence, RI, 2001.

[**SY**] R. Schoen and S.-T. Yau, *Lectures on Differential Geometry*, Conference Proceedings ad Lecture Notes in Geometry and Topology, International Press, Cambridge, MA, 1994.

[**E**] L. C. Evans, *Partial Differential Equations* (2nd edition), Graduate Studies in Mathemathics, 19. AMS, Providence, RI, 2010.

[**GT**] D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* (1st edition), Springer-Verlag, New York, NY, 1977.

[**LZ**] Y. Y. Li and L. Zhang, *Liouville Type Theorems and Harnack Type Inequalities for Semilinear Elliptic Equations*, Journal d'Analyse Mathématique **99** (2003), 27-87.

[**GNN**] B. Gidas, W. M. Ni and L. Nirenberg, *Simmetry and Related Properties via the Maximum Principle*, Communications in Mathematical Physics **68** (1979), 209-243.

[**CGS**] L. A. Caffarelli, B. Gidas and J. Spruck, *Asymptotic Symmetry and Local Behavior of Semilinear Elliptic Equations with Critical Sobolev Growth*, Communications on Pure and Applied Mathematics **42** (1989), 271-297.

Il riferimento principale per il paragrafo 1.1 è [**LL**] per quanto riguarda la disugualianza di Sobolev [8.3] e il lavoro negli spazi L^p [2].
Per la descrizione del problema di Yamabe abbiamo invece utilizzato [**SY**] [5].
Il lavoro sugli operatori differenziali, i Principi del Massimo (Debole e Forte) e il Lemma di Hopf segue l'esposizione di tali argomenti in [**E**] [6.4] e [**GT**] [3].
Infine i paragrafi 3.3 e 4.2 ripercorrono i passaggi illustrati in [**LZ**] [1] e [2].