Was passiert längs gebogener Origami-Falten?

Hermann Karcher, Nov 2005

Wenn man die Spitze eines Rotationskegels an einer Breitenkreisebene spiegelt, so erhält man einen kegelförmigen Trichter in einem Kegelberg. Ein solches Gebilde kann man aus einem Blatt Papier herstellen: Auf dem abgerollten Papier ist die Faltlinie zwischen Berg und Trichter ein Kreis um den Punkt, der die Spitze des Kegels wird. Ich diskutiere im Folgenden, wie man ein Papier längs einer beliebigen Kurve auf diesem Papier falten kann.

Mathematisch ist ein gebogenes Stück Papier eine Fläche, deren Gaußsche Krümmung $K = 0$ ist. Überall, wo eine solche Fläche nicht flach wie eine Ebene ist, sieht sie in folgender Weise einem Kegel ähnlich: Sie besitzt an jeder Stelle zwei verschiedene Hauptkrümmungen $\kappa_1 = 0, \kappa_2 \neq 0$. In der ersten Hauptkrümmungsrichtung liegt ein Geradenstück auf der Fläche, das erst am Rand oder an einer Singularität endet. Die Singularität kann komplizierter sein als eine Kegelspitze, z.B. wie die Gratlinie ($t = s$) bei der Tangentenfläche einer Raumkurve c:

$$F(s,t) = c(s) + (t-s) \cdot c'(s), \qquad t \geq s.$$

Eine Fläche, die von einer Schar von Geraden(stücken) erzeugt wird, heißt Regelfläche. Eine Regelfläche ist *abwickelbar* genau dann, wenn sie Gaußsche Krümmung $K = 0$ hat. Ob sie Krümmung $K = 0$ hat, erkennt man daran, dass die geraden Linien Krümmungslinien sind, d.h. dass die Flächennormalen längs eines solchen Geradenstückes **parallel** sind. Bei den Tangentenflächen ist die Flächennormale $N(s,t)$ parallel zu $c'(s) \times c''(s)$, unabhängig von t.

Zunächst soll eine ebene Kurve $s \to \gamma(s)$ zusammen mit einem Streifen der Ebene auf der linken Seite der Kurve verbogen werden in eine Raumkurve, die einen Flächenstreifen mit $K = 0$ berandet. Bei diesem Verbiegen ist die geodätische Krümmung der verbogenen Kurve c auf der verbogenen Fläche **gleich** der Krümmung der gegebenen ebenen Kurve, und diese Kurve γ ist (bis auf die Wahl von Anfangspunkt und Anfangsrichtung) durch diese Krümmungsfunktion $s \to \kappa_g(s)$ bestimmt. Längs der Raumkurve c betrachten wir eine Basis aus Einheitsvektoren $\{E_1(s) := c'(s),\ E_2(s),\ N(s)\}$. Dabei soll $N(s)$ die Normale des verbogenen Flächenstreifens werden und $\{E_1(s),\ E_2(s)\}$ eine Basis der Tangentialebene im Punkt $c(s)$. Die sogenannten *Frenetgleichungen* der Raumkurve c drücken die Ableitungen dieser Basisvektoren als Linearkombinationen der Basisvektoren aus, die dabei auftretenden Koeffizienten sind Krümmungsfunktionen der Raumkurve:

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ N \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & -\kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & -\tau_n \\ \kappa_n & \tau_n & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ N \end{pmatrix}, \qquad c(s) := \int_0^s E_1(u)du.$$

Hierin is κ_g mit der ebenen Kurve γ gegeben und κ_n (Normalkrümmung) und τ_n (normale Torsion) sind frei wählbare stetig differenzierbare Funktionen, durch die die Raumkurve bestimmt ist und der noch zu suchende verbogene Flächenstreifen bestimmt sein wird.

Da N die Normale des gesuchten Flächenstreifens werden soll, kennen wir aus der letzten Zeile der Frenetgleichungen drei Einträge der symmetrischen Matrix der Weingartenabbildung $S = \nabla N$:

$$(S)_{\{E_1,E_2\}} = \begin{pmatrix} \kappa_n & \tau_n \\ \tau_n & ? \end{pmatrix}.$$

Der letzte Eintrag ergibt sich aus $0 = K = \det(S)$ zu $? = \tau_n^2/\kappa_n$. Damit findet man als nächstes die Hauptkrümmungsrichtungen als Eigenvektoren der Weingartenabbildung S,
zum Eigenwert 0: $\quad -\tau_n E_1 + \kappa_n E_2$
und zum Eigenwert spur $S = \kappa_n + \tau_n^2/\kappa_n$: $\quad \kappa_n E_1 + \tau_n E_2$.
Geradenstücke in Richtung der Eigenvektoren zum Eigenwert 0 müssen nun das gesuchte Flächenstück erzeugen. Bis auf die unwichtige Freiheit in der Wahl der Länge der Eigenvektoren haben wir also nur noch einen Kandidaten für das gesuchte verbogene Flächenstück:

$$F(s,t) = c(s) + t \cdot (-\tau_n E_1 + \kappa_n E_2).$$

Hierdurch wird nun in der Tat eine Fläche mit $K = 0$ gegeben, weil der Vektor $N(s)$ für jedes s unabhängig von t senkrecht auf den beiden Tangentialvektoren $\partial F/\partial t$, $\partial F/\partial s$ steht – dazu ist nur mit den Frenetgleichungen nachzurechnen, dass

$$-\tau_n E_1' + \kappa_n E_2' = -\kappa_g \cdot (\kappa_n E_1 + \tau_n E_2)$$

gilt. Dies und alle anderen vorkommenden Ableitungen sind offensichtlich senkrecht zu $N(s)$. Damit ist die Freiheit beim Verbiegen einer einseitig von Papier berandeten ebenen Kurve beschrieben.

Nun soll das Papier nicht längs der Kurve γ zerschnitten werden. Was bedeutet das für den von der anderen Seite angesetzten verbogenen Papierstreifen? Wir beschreiben auch diesen Streifen mit einer angepaßten Basis $\{E_1(s),\ \tilde{E}_2(s),\ \tilde{N}(s)\}$, die wir durch Drehung um einen Winkel $\varphi(s)$ aus der ersten Basis erzeugen. Die beiden verbogenen Flächenstreifen werden sich dann in $c(s)$ unter dem Winkel $\varphi(s)$ schneiden.

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_2(s) &= \cos\varphi(s) \cdot E_2(s) - \sin\varphi(s) \cdot N(s) \\
\tilde{N}(s) &= +\sin\varphi(s) \cdot E_2(s) + \cos\varphi(s) \cdot N(s) \\
E_2(s) &= \cos\varphi(s) \cdot \tilde{E}_2(s) + \sin\varphi(s) \cdot \tilde{N}(s) \\
N(s) &= -\sin\varphi(s) \cdot \tilde{E}_2(s) + \cos\varphi(s) \cdot \tilde{N}(s).
\end{aligned}$$

Die entscheidende Bedingung, die daher kommt, dass wir das **unzerschnittene** Papier verbiegen, ist nun

$$\tilde{\kappa}_g(s) = -\kappa_g(s).$$

Daraus folgen nun mit

$$\begin{aligned}
c''(s) = E_1'(s) &= \kappa_g E_2(s) - \kappa_n(s) N(s) = \tilde{\kappa}_g \tilde{E}_2(s) - \tilde{\kappa}_n(s)\tilde{N}(s) \\
&= (\kappa_g \cos\varphi + \kappa_n \sin\varphi)\tilde{E}_2 + (\kappa_g \sin\varphi - \kappa_n \cos\varphi)\tilde{N}
\end{aligned}$$

erste Bedingungen zwischen den benutzten Funktionen:

$$\begin{gathered}
-\kappa_g = \kappa_g \cos\varphi + \kappa_n \sin\varphi \qquad \text{hence} \\
\kappa_g(s) = -\kappa_n(s) \cdot \tan(\varphi(s)/2) \\
-\tilde{\kappa}_n = \kappa_g \sin\varphi - \kappa_n \cos\varphi = -\kappa_n \tan(\varphi(s)/2) \sin\varphi - \kappa_n \cos\varphi = -\kappa_n
\end{gathered}$$

Ebenso rechnen wir durch Einsetzen nach:

$$\tilde{E}_2'(s) = \kappa_g E_1(s) + (-\varphi'(s) - \tau_n(s))\tilde{N}(s) = -\tilde{\kappa}_g E_1(s) - \tilde{\tau}_n(s)\tilde{N}(s).$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\tilde{\kappa}_g(s) = -\kappa_g(s),\ \tilde{\kappa}_n(s) = \kappa_n(s),\ \tilde{\tau}_n(s) = \varphi'(s) + \tau_n(s),\ \kappa_g(s) = -\kappa_n(s)\cdot\tan(\varphi(s)/2).$$

Hierdurch wird das längs der Kurve γ gefaltete Papier beschrieben, das dabei im Raum in der Weise verbogen wird, dass aus der ebenen Papierkurve γ die Raumkurve c wird.

Als nächstes werden weitere geometrische Daten berechnet. Wir haben für die **Krümmung einer Raumkurve** c:

$$\kappa(s) := |c''(s)|, \quad \text{hier also:} \quad \kappa(s) = \sqrt{\kappa_g^2(s) + \kappa_n^2(s)}.$$

Hauptnormale und Binormale sind die Einheitsvektoren in Richtung $c'' = \kappa_g E_2 - \kappa_n N$ und in Richtung $c' \times c'' = \kappa_n E_2 + \kappa_g N$. Deshalb berechnet sich die **Torsion** von c aus:

$$\begin{aligned}
-\tau &= \langle(\kappa_g E_2 - \kappa_n N)',\ \kappa_n E_2 + \kappa_g N\rangle/\kappa^2 \\
&= \frac{\kappa_g'\kappa_n - \kappa_n'\kappa_g}{\kappa^2} + \big(\kappa_g^2\langle E_2', N\rangle - \kappa_n^2\langle E_2, N'\rangle\big)/\kappa^2 \\
&= -\frac{1}{2}\varphi' - \tau_n.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt durch Differenzieren von

$$(\kappa_g/\kappa_n) = -\tan(\varphi/2), \qquad \text{also:}$$

$$(\kappa_g'\kappa_n - \kappa_g\kappa_n')/\kappa_n^2 = -\frac{1}{2}(1 + \tan^2(\varphi/2))\cdot\varphi' = -\frac{1}{2}((\kappa_n^2 + \kappa_g^2)/\kappa_n^2)\cdot\varphi'.$$

Geometrisch interessant ist auch der Winkel $\alpha(s)$, um den die Orthonomalbasis der Hauptkrümmungsrichtungen gedreht ist gegenüber der Basis $\{E_1 = c', E_2\}$, also:

$$\tan\alpha(s) := \tau_n(s)/\kappa_n(s), \qquad \text{und daher auch} \qquad \alpha'(s) = \frac{\tau_n'(s)\kappa_n(s) - \tau_n(s)\kappa_n'(s)}{\kappa_n^2 + \tau_n^2}.$$

Schließlich ist wichtig, wo die Geradenstücke des verbogenen Papiers eine Singularität treffen. Das ist dort der Fall, wo in unserer Formel für die Fläche die beiden Tangentialvektoren $\partial F/\partial t,\ \partial F/\partial s$ linear abhängig werden, also

$$(1 - t(\kappa_g\kappa_n + \tau_n'))\cdot E_1 + t(\kappa_n' - \kappa_g\tau_n)\cdot E_2 = \lambda(-\tau_n\cdot E_1 + \kappa_n\cdot E_2), \text{ oder}$$

$$t = \frac{1}{\kappa(s)}\frac{\cos\alpha(s)}{\kappa_g(s) + \alpha'(s)}.$$

Der Krümmungsradius von γ bei $\gamma(s)$ ist $1/\kappa_g(s)$. Im Falle $\alpha'(s) = 0$ trifft das Geradenstück, das in $c(s)$ auf der verbogenen Fläche beginnt, spätestens im Abstand $1/\kappa_g(s)$ einen singulären Punkt. Nur so weit kann man das Papier verbiegen.

Mit Hilfe des Winkels $\alpha(s)$, den die Geradenstücke mit den Kurvennormalen $E_2(s)$ auf der gebogenen Fläche bilden, kann man diese Geradenstücke auch auf das noch ebene Stück Papier zeichnen. Nun sollen diese Geradenstücke eine zweite Faltkurve schneiden. Welche Freiheiten zum Falten hat man jetzt noch? Zunächst sind durch die neue Faltkurve deren geodätische Krümmung κ_g^* und wegen der bekannten ankommenden Geradenstücke auch die neue Winkelfunktion $\alpha^*(s^*)$ bekannt. Man kann nun an der zweiten Falte den Schnittwinkel $\varphi^*(s^*)$ vorschreiben und daraus die Normalkrümmung $\kappa_n^*(s^*)$ und die normale Torsion $\tau_n^*(s^*)$ der neuen Faltlinie ausrechnen — und damit auch deren Gestalt als Raumkurve c^*.

Zusammengefaßt: Man kann auf dem ungefalteten Papier die Faltkurven und die gewünschten Geradenstücke zwischen ihnen einzeichnen. Danach kann man noch den Winkel an den Falten vorschreiben. Daraus kann man die Raumkurven bestimmen, die sich beim Verformen mit den genannten Vorgaben ergeben. Falls der Knickwinkel $\varphi(s)$ konstant gewählt wird, so gilt

$$\tan(\alpha(s)) = \frac{\tau_n}{\kappa_n}(s) = \frac{\tilde{\tau}_n}{\tilde{\kappa}_n}(s) = \tan(\tilde{\alpha}(s)),$$

das heißt, die Funktion α ist auf beiden Seiten der Falte dieselbe. Es mag interessant sein, Faltkurven mit Torsion $\tau = 0$ erreichen zu wollen. Schreibt man konstante Knickwinkel φ an den Faltlinien vor, so müssen die Geradenstücke die Faltkurven senkrecht treffen ($\tau_n = 0$) und das ist dann auch hinreichend für ebene Knickkurven im Raum.