Differentialgeometrie I

Vorzeichenkonventionen: Für ebene Kurven sei die Normale $n(t)$ und $\dot c(t)/|\dot c(t)|$ eine positiv orientierte ON-Basis (wie $\mathbf{1}, \mathbf{i}$ in $\mathbb{C}$). Die Krümmung (mit Vorzeichen) ist dann

$$\kappa(t) = \frac{\langle \dot n(t), \dot c(t)\rangle}{\langle \dot c(t), \dot c(t)\rangle} = \frac{\det(\dot c(t), \ddot c(t))}{\langle \dot c(t), \dot c(t)\rangle^{3/2}} = \frac{1}{r(t)}.$$

Für sphärische Kurven sei $\{n(t), \dot c(t), c(t)\}$ eine positiv orientierte ON-Basis von $\mathbb{R}^3$. Die "geodätische" Krümmung (mit Vorzeichen) ist dann

$$\kappa_g(t) = \frac{\langle \dot n(t), \dot c(t)\rangle}{\langle \dot c(t), \dot c(t)\rangle} = \frac{\det(c(t), \dot c(t), \ddot c(t))}{\langle \dot c(t), \dot c(t)\rangle^{3/2}} = \cot(r(t)).$$

Aufgabe 3.1 (Tangente und Krümmung in Spitzen)
In Aufgabe 1.3 haben wir gesehen, daß die Zykloide

$$c(t) = (r \cdot t, 0) + r \cdot (\cos(t),\ -\sin(t))$$

in ihren tiefsten Punkten die Geschwindigkeit 0 hat. Als parametrisierte Kurve hat sie also keine Tangente – tatsächlich hat das Bild der Kurve im tiefsten Punkt eine Spitze.
(a) Trotzdem haben die Sekanten durch die Spitze eine vertikale Grenzlage, verifiziere:

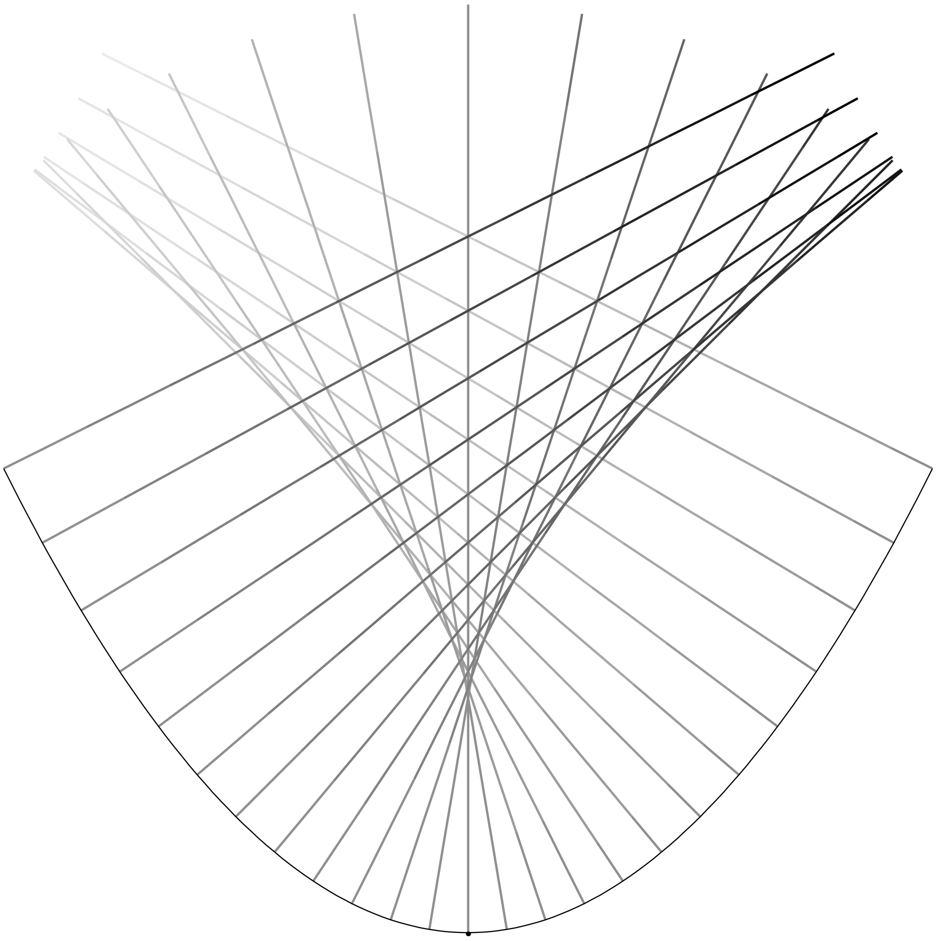
$$\lim_{t\to\pi/2} \frac{\langle c(t) - c(\pi/2), (1,0)\rangle}{\langle c(t) - c(\pi/2), (0,1)\rangle} = 0.$$

(b) Berechne die Krümmung der Zykloide. Was passiert in den Spitzen?

Aufgabe 3.2 (Ebenen und Kugeln)
Bilden Sie mit Hilfe der Inversion $\mathrm{In} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\mathrm{In}(x) := x/|x|^2$ Ebenen $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x, v\rangle = b\}$ und Kugeln mit Mittelpunkt $m \in \mathbb{R}^n$, $\{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x - m, x - m\rangle = r^2\}$ ab. Beachten Sie $\mathrm{In} \circ \mathrm{In} = \mathrm{id}$. Stellen Sie fest, daß die Bilder wieder Kugeln und Ebenen sind. Warum werden auch Geraden und Kreise auf Geraden und Kreise abgebildet?

Aufgabe 3.3 (Krümmungsradien von Fadenevolventen in $\mathbb{R}^2$)
Es sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve. Stellen Sie fest, daß die Krümmungsradien der Evolvente $C(s) := c(s) - (s - s_0)c'(s)$ (Tangente $C'(s)$, Normale $N(s)$ zuerst ausrechnen) nicht unerwartet $r(s) = (s - s_0)$ sind. Daher ist die gegebene Kurve c die Evolute (Ort der Krümmungsmittelpunkte) der Evolvente C von c.

Aufgabe 3.4 (Krümmungsradien von Fadenevolventen auf $\mathbb{S}^2$)
Es sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte sphärische Kurve, $|c(s)| = 1$. Stellen Sie fest, daß die Krümmungsradien der Evolvente $C(s) := \cos(s - s_0)c(s) - \sin(s - s_0)c'(s)$ (Tangente $C'(s)$, Normale $N(s)$) nicht unerwartet $r(s) = (s - s_0)$ sind. Daher gilt auch auf der Sphäre, daß die gegebene Kurve c die Evolute (Ort der Krümmungsmittelpunkte) der Evolvente C von c ist. Erinnerung: $\langle c(s),\ c''(s)\rangle = -\langle c'(s),\ c'(s)\rangle = -1$.
Vor Anwendung des Additionstheorems für cot ist ein Faktor zu kürzen.



Die Normalen einer Kurve hüllen deren Evolute ein. Interpretiert man die Grauwerte der Normalen als “Höhe”, so sieht man eine von Geraden erzeugte Fläche, deren Konturlinie gerade die Evolute ist. – Die Normalen der Parabel schneiden sich in Tripeln, für die x-Koordinaten der zugehörigen Parabelpunkte gilt $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.