Differentialgeometrie I

Aufgabe 11.1 (Komposition von Drehungen der hyperbolischen Ebene)

(a) Bitte mit Text beantworten: Die Komposition von zwei hyperbolischen Spiegelungen, deren Achsen sich schneiden, ist eine Drehung um den Schnittpunkt. Um dies nachzurechnen, kann man annehmen, der Schnittpunkt sei $(1, 0, 0)$, warum? In diesem Spezialfall stimmt die Rechnung mit der Euklidischen Rechnung überein, warum? Der Drehwinkel ist doppelt so groß wie der Winkel zwischen den Spiegelachsen, warum?

(b) Gegeben sei ein hyperbolisches Dreieck mit den Ecken A, B, C und den Winkeln α, β, γ. Mit DA, DB, DC seien die Drehungen um A, B, C bezeichnet, die um $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ gegen den Uhrzeigersinn drehen. Folgern Sie mit (a): $DA \circ DB \circ DC = \mathrm{id}$.

Aufgabe 11.2 (Hyperbolische Drehungen, auch um Fernpunkte)

(a) Was für Abbildungen der Hyperbolischen Ebene beschreiben die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cosh r & -\sinh r & 0 \\ \sinh r & -\cosh r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

(b) Wie kann man aus diesen Abbildungen eine Drehung um den Punkt $(\cosh r, \sinh r, 0)$ zusammensetzen? (Wie drehen Sie in der Euklidischen Ebene um andere Punkte als den Ursprung $0 \in \mathbb{R}^2$?)

(c) Spezialisieren Sie $\varphi := t/\sinh r$. Dann bewegt die Drehung aus (b) den Punkt $(1, 0, 0)$ mit der Geschwindigkeit 1. (Geschwindigkeit $:= \frac{d}{dt} \mathit{Bewegung}(t) \cdot \mathit{Punkt}$)

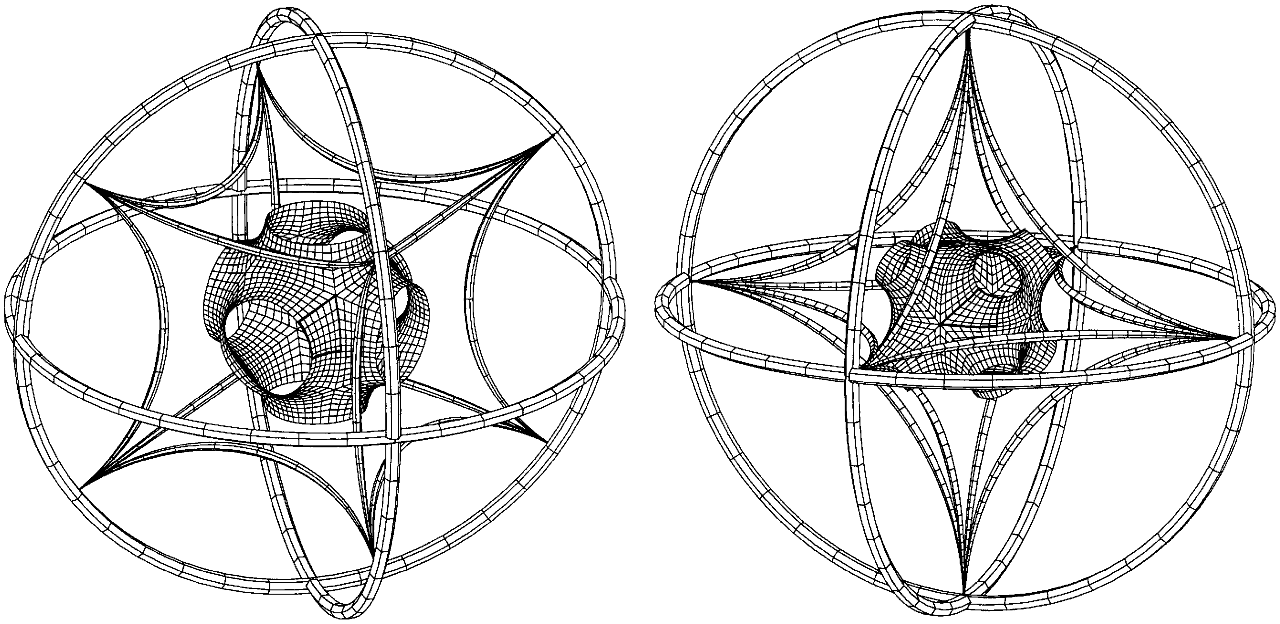
(d) Wir finden eine neue Art hyperbolischer Bewegungen, wenn wir den Grenzübergang $r \to \infty$ machen. Bestimmen Sie die Matrix $M_{ij}(t)$. (Kontrolle: $M_{11} = 1 + t^2/2$.)

Aufgabe 11.3 (Hyperbolische Würfel)

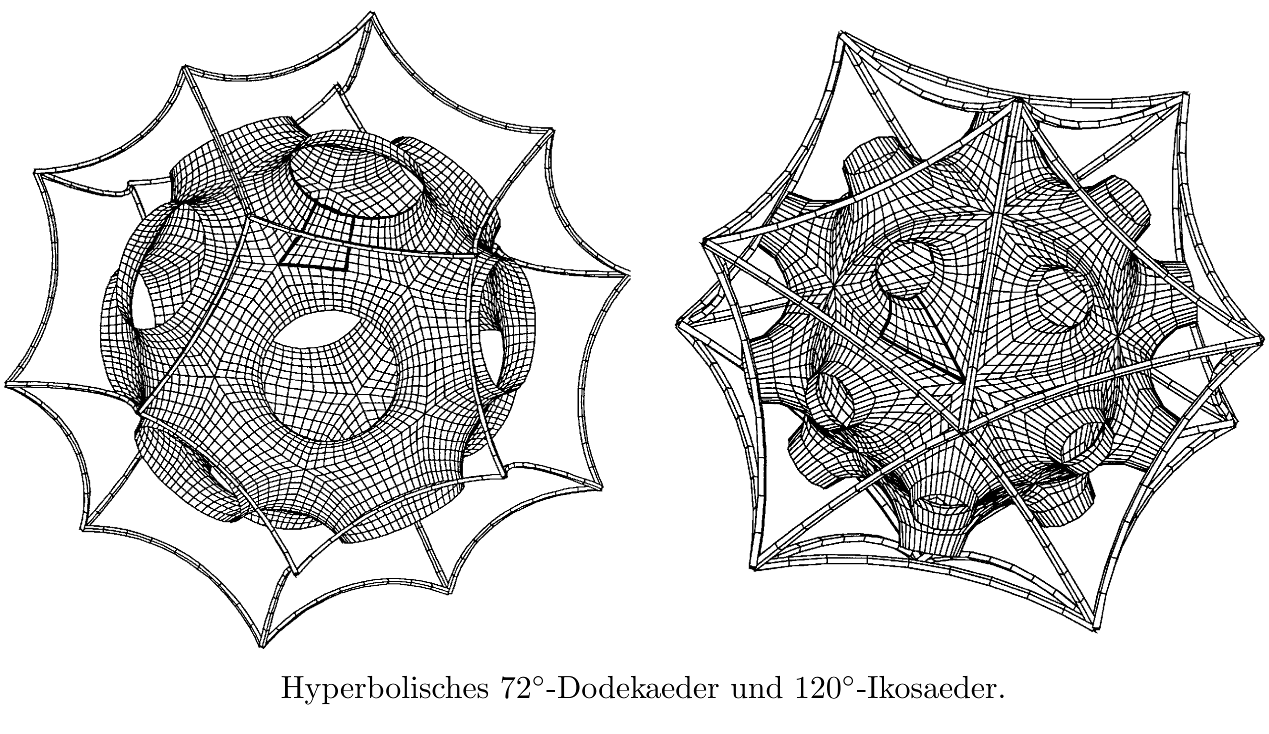
In der Vorlesung wurden hyperbolische Würfel im dreidimensionalen Hyperbolischen Raum H^3 besprochen. Wiederholen Sie deren Konstruktion, d.h. berechnen Sie die übrigen Würfelgrößen aus dem Inkugelradius r. Überprüfen Sie, daß die Diederwinkel die Grenzfälle $90°$ $(r \to 0)$ und $60°$ $(r \to \infty)$ haben. Dabei sind die Formeln für rechtwinklige Dreiecke nützlich:

Sphärische Dreiecke	Hyperbolische Dreiecke
$\cos a \cos b \overset{(1)}{=} \cos c \overset{(4)}{=} \cot\alpha \cot\beta$	$\cosh a \cosh b \overset{(1)}{=} \cosh c \overset{(4)}{=} \cot\alpha \cot\beta$
$\cos a \, \sin\beta \overset{(2)}{=} \cos\alpha \overset{(5)}{=} \tan b \cot c$	$\cosh a \, \sin\beta \overset{(2)}{=} \cos\alpha \overset{(5)}{=} \tanh b \coth c$
$\sin c \, \sin\alpha \overset{(3)}{=} \sin a \overset{(6)}{=} \tan b \cot\beta,$	$\sinh c \, \sin\alpha \overset{(3)}{=} \sinh a \overset{(6)}{=} \tanh b \cot\beta.$

Die folgenden Bilder zeigen Platonische Körper aus dem dreidimensionalen Hyperbolischen Raum in stereographischer Projektion. Bei den ersten beiden Figuren ist der Rand der stereographischen Karte angedeutet. Außerdem ist jedem Polyeder eine Minimalfläche aus der Dissertation von K. Polthier einbeschrieben.



Hyperbolischer Würfel und Oktaeder mit Ecken in ∞.



Hyperbolisches 72°-Dodekaeder und 120°-Ikosaeder.