Mathematatik für Physiker III — Prof. Dr. Jens Franke
Universität Bonn, Ws 2013/14 — Jan Büthe

Übungsblatt 8

Abgabe am 18.12.2013
in der Vorlesung

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $w \in U$ und sei $g\colon U \setminus \{w\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer nicht hebbaren Singularität bei w. Zeigen Sie, dass dann $\exp(g(z))$ bei w eine wesentliche Singularität hat.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)^2}{\cos(t)+3}\,dt$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $f_w(z) = \exp(\frac{w}{2}(z - \frac{1}{z}))$ und sei

$$f_w(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(w) z^n$$

die Laurentreihe in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- Es gilt $J_{-n}(w) = J_n(-w)$.
- Die Funktionen J_n sind holomorph und für $n \geq 0$ gilt

$$J_n(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\Big(\frac{w}{2}\Big)^{2k+n}.$$

- J_n besitzt die Integraldarstellung

$$J_n(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - w\sin(t))\,dt.$$

- Es gilt die Rekursionsformel

$$J_{n-1}(w) + J_{n+1}(w) = \frac{2n}{w} J_n(w).$$

- Für $n \geq 0$ löst J_n die Differenzialgleichung

$$w^2 f''(w) + wf'(w) + (w^2 - n^2)f(w) = 0.$$